

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

**ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική
παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

ΟΝΟΜΑ: ΑΛΕΞΙΑ ΜΑΡΝΑΡΗ
ΑΕΜ: 316

ΜΕΘΟΔΟΣ TAYLOR ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ.

Μέθοδος 1: Σειρές Taylor για την προσέγγιση “ομαλών” συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

| n | f(.3) | p(.3) | Εκτίμηση σφάλματος |
|---|------------|--------------|--------------------|
| 2 | 0.30769231 | -1.25000000 | 96.72523090 |
| 4 | 0.30769231 | 3.81250000 | 2592.07544886 |
| 6 | 0.30769231 | -12.13437500 | 58431.83431360 |



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 υπολογίζονται με βάση τον τύπο του Taylor αλλά και τις παραγώγους που δίνονται θέτοντας $a=0$.

Ισχύουν: $f(0) = 1/(1 + 25 * 0) = 1$

$f'(0) = -50x(1 + 25x^2) = 0$

$f''(0) = 50(75x^2 - 1)/(1 + 25x^2)^3 = -50$

$T_2(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$.

Άρα $T_2(x) = 1x - 50x^2/2!$

Όμοια υπολογίζουμε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 6

2) Οι τιμές και των 3 πολυωνύμων που υπολογίσαμε στο $x=0.3$ διαφέρουν αρκετά από την τιμή της συνάρτησης στο $x=0.3$. Κανένα πολυώνυμο δεν δίνει καλή προσέγγιση της λύσης. Επιπλέον και τα 3 πολυώνυμα έχουν μεγάλο σφάλμα και παρατηρούμε ότι όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου μεγαλώνει και το σφάλμα.

3) Για τον υπολογισμό του σφάλματος, ζητείται άνω όριο του σφάλματος δηλαδή το $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1}$ με ξ να είναι μέγιστο και ξ να ανήκει στο διάστημα (x, a)

Μέθοδος 2: Πολυωνυμική Παρεμβολή Συναρτήσεων και Δεδομένων

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα σφάλματα για τις διάφορες περιπτώσεις πλήθους σημείων προκύπτουν από τον παρακάτω πίνακα

| αριθμός σημείων | εκτίμηση σφάλματος |
|-----------------|--------------------|
| 3 | 0.87267038 |
| 7 | 0.96786931 |
| 13 | 6.56057959 |
| 31 | 86.64594694 |
| 61 | 6.87406189 |

♣

2) Από την γραφική παράσταση διαπιστώνουμε ότι όσο περισσότερα σημεία έχουμε, αφενός το πολυώνυμο παρεμβολής πλησιάζει την πραγματική συνάρτηση στο κέντρο του διαστήματος που ορίζουμε, αφετέρου παρατηρούνται μεγάλες αποκλίσεις στα άκρα του διαστήματος καθώς το πολυώνυμο ταλαντώνεται έντονα γύρω από τα ακραία σημεία.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι προκύπτει το φαινόμενο του Runge στο οποίο:

Αυξάνοντας το βαθμό του πολυωνύμου τα πολυώνυμα δείχνουν ασταθή συμπεριφορά.

Επιπλέον όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει, το πολυώνυμο παρεμβολής συμπίπτει με τις τιμές της συνάρτησης στα σημεία παρεμβολής, αλλά μεταξύ των σημείων παρεμβολής παρουσιάζονται ταλαντώσεις.

Όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνεται και το πλάτος των ταλαντώσεων.

Ωστόσο στο μεσαίο διάστημα το πολυώνυμο παρεμβολής συμπεριφέρεται ευσταθώς και όσο ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει, το πολυώνυμο παρεμβολής πλησιάζει την πραγματική συνάρτηση.

Δηλαδή παρατηρείται πολύ καλή συμπεριφορά του πολυωνύμου παρεμβολής για το μεσαίο διάστημα, αλλά μεγάλες αποκλίσεις στα άκρα λόγω των έντονων ταλαντώσεων.

Στην περίπτωση των πολυωνύμων παρεμβολής δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το σφάλμα καθώς ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει. Αλλά υπάρχει το *a priori* σφάλμα (απο θεωρία) Το πρόβλημα αντιμετωπίζεται με την χρήση μη ισαπέχοντων σημείων τα οποία πυκνώνουν στα άκρα του διαστήματος παρεμβολής, δηλαδή με την χρήση των σημείων Chebychev.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα σφάλματα για τις διάφορες περιπτώσεις πλήθους σημείων προκύπτουν από τον παρακάτω πίνακα

| αριθμός σημείων | εκτίμηση σφάλματος |
|-----------------|--------------------|
| 3 | 0.99355898 |
| 7 | 0.68045626 |
| 13 | 0.20048991 |
| 31 | 0.00047881 |
| 61 | 0.00003506 |

♣

2) Χρησιμοποιώντας αντί για ισαπέχοντα σημεία τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

επιλύουμε το πρόβλημα του φαινομένου Runge της προηγούμενης άσκησης.

Και αυτό διότι τα σημεία που προκύπτουν από αυτό τον τύπο είναι τα σημεία Chebychev τα οποία είναι διαφορετικά μεταξύ τους και συσσωρεύονται στα άκρα του διαστήματος καθώς ο βαθμός του πολωνύμου αυξάνει. Επιλύεται έτσι το πρόβλημα των έντονων ταλαντώσεων του πολωνύμου γύρω από τα ακραία σημεία. Τελικά όσο αυξάνουμε το βαθμό του πολωνύμου, τόσο το πολωνύμο θα πλησιάζει την πραγματική συνάρτηση. Από την γραφική παράσταση που προκύπτει, παρατηρούμε ότι, όσο περισσότερα σημεία επιλέγουμε, τόσο "καλύτερο" είναι το πολωνύμο παρεμβολής και καλύτερη περίπτωση στην άσκηση μας έχουμε στην περίπτωση των 61 σημείων όπου παρατηρείται και το μικρότερο σφάλμα.

Μέθοδος 3: Τμηματική πολωνυμική παρεμβολή συναρτήσεων και δεδομένων

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ' ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ' ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Τα σφάλματα για τις διάφορες περιπτώσεις πλήθους σημείων προκύπτουν από τον παρακάτω πίνακα

| αριθμός σημείων | εκτίμηση σφάλματος |
|-----------------|--------------------|
| 7 | 0.2534 |
| 13 | 0.0116 |
| 31 | 9.3140e-004 |
| 61 | 5.2400e-005 |

♣

- 2) Στην περίπτωση της πολυωνυμικής παρεμβολής με κυβικές splines ο βαθμός του πολυωνύμου θα είναι σταθερός και ίσος με 3 ενώ θα υπάρχει και συνέχεια μέχρι και την δεύτερη παράγωγο.
- 3) Επιπλέον το σφάλμα υπολογίζεται, θα είναι φραγμένο και μάλιστα με καλύτερο φράγμα από προηγούμενες μεθόδους αφού ο αριθμός των σημείων δεν εξαρτάται από τον βαθμό του πολυωνύμου.
- 4) Έτσι από τα αποτελέσματα του παραπάνω πίνακα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των σημείων το σφάλμα μειώνεται. Επομένως το πολυώνυμο πλησιάζει όλο και περισσότερο την πραγματική συνάρτηση.
- 5) Τέλος παρατηρούμε ότι η μέθοδος με κυβικές splines δίνει μικρότερα σφάλματα σε σχέση με την μέθοδο πολυωνυμικής παρεμβολής.
- 6) Για την δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι 0.1384 δηλαδή αρκετά μικρό. Έτσι και πάλι το κυβικό πολυώνυμο πλησιάζει σε μεγάλο βαθμό την πραγματική συνάρτηση.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Προκύπτει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών είναι 1.3911

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- 1) Προκύπτει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών για το πολυώνυμο τεταρτου βαθμού είναι 0.9124 ενώ για το πολυώνυμο ογδοου βαθμού είναι 0.6655
- 2) Παρατηρούμε ότι καθώς ο βαθμός του πολυωνύμου αυξάνει, το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών μικραίνει.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους (Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gn ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες. ♣

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού κατάλληλη μέθοδος είναι η παρεμβολή, γιατί η παρεμβολή περνάει ακριβώς από τα σημεία της εικόνας, ενώ η προσέγγιση περνά κοντά στα σημεία. Έτσι στην δεύτερη περίπτωση θα είχαμε παραμόρφωση της εικόνας και όχι το επιθυμητό αποτέλεσμα.