

Όνομα : Marie-Aurelie Nef

Username : manef

ΑΕΜ : 370

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor
και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**

ΜΕΘΟΔΟΣ TAYLOR ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Υπολογίστε το βαθμό n του πολωνύμου p (σύμφωνα με τη μέθοδο Taylor ως προς το σημείο 0) το οποίο προσεγγίζει τη συνάρτηση $\cos(x)$ με σφάλμα μικρότερο ή ίσο $\frac{1}{2}10^{-5}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Σχεδιάστε το πολυώνυμο και την $\cos(x)$ στην ίδια γραφική παράσταση για το διάστημα $[-3\pi/2, 3\pi/2]$.

```
clear; clc;
```

```
disp('PROBLHMA 1');
```

```
x = linspace(-pi/2, pi/2, 1001);
```

```
x2 = x.*x;
```

```
parag4 = 2*3*4;
```

```
parag6 = parag4 *5*6;
```

```
parag8 = parag6 *7*8;
```

```
parag10 = parag8 *9*10;
```

```
parag12 = parag10 *11*12;
```

```
parag14 = parag12 *13*14;
```

```
y = 1 - (x2)/2 + (x2.^2)/parag4 - (x2.^3)/parag6
```

```
+ (x2.^4)/parag8 - (x2.^5)/parag10 + (x2.^6)/parag12 - (x2.^7)/parag14;
```

```

cosx = cos(x);

err = max(abs(y-cosx))

plot(x, cosx, 'r-', 'linewidth', 2); hold on;
plot(x, y, 'k-. ', 'linewidth', 2);
legend('cos(x)', 'T_{14} ')
xlabel('x'); ylabel('y')
title('H synarthsh cos(x) kai to polywnymo 14·{ou} vaqmoy')
hold off;

```

Το σφάλμα είναι ίσο με $6.5134 \cdot 10^{-11}$.

Παρατηρούμε ότι έχουμε σχετικά πολύ καλό σφάλμα και αυτό φαίνεται και στην γραφική παράσταση.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα.

```

disp('ASKHSH 1');
clf;
clear all;
xx = linspace(-1, 1, 201);
xx2 = xx.*xx;

y2 = 1 - 50*xx2/2;
y4 = y2 + 15000*(xx2.*xx2)/24;
y6 = y4 - 11250000*(xx2.*xx2.*xx2)/720;

yfun = 1./(1+25*xx.*xx);
plot(xx, yfun, 'k-', 'linewidth', 2); hold on;
plot(xx, y2, 'k-. ', 'linewidth', 2);
plot(xx, y4, 'k--', 'linewidth', 2);
plot(xx, y6, 'k:', 'linewidth', 2);
legend('1/(1+25*x·2)', 'T_2', 'T_4', 'T_6')
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-1 1 -5 5])
title('H synarthsh 1/(1+25*x·2) kai ta polywnyma 2ou, 4ou kai 6ou va8moy')

```

```

fprintf('H timh ths synarthshs sto 0.3 einai %12.8f \n', 1/(1+25*0.3*0.3));
fprintf('H timh toy polywnymoy T_2 sto 0.3 einai %12.8f \n',
        1 - 50*(0.3^2)/2);
fprintf('H timh toy polywnymoy T_4 sto 0.3 einai %12.8f \n',
        1 - 50*(0.3^2)/2 + 15000*(0.3^4)/24);
fprintf('H timh toy polywnymoy T_6 sto 0.3 einai %12.8f \n',
        1 - 50*(0.3^2)/2 + 15000*(0.3^4)/24 - 11250000*(0.3^6)/720);

maxerror2 = max(abs((15000*xx.*(-1+25*xx2)./(1+25*xx2).^4))/6));
maxerror4 = max(abs((3750000*xx.*(3+1875*xx2.*xx2-250*xx2)./
        ((1+25*xx2).^6))/120));
maxerror6 = max(abs((15750000000*xx.*
        (-1+175*xx2-4375*xx2.^2+15625*xx2.^3)./(1+25*xx2).^8))/5040));

fprintf('H ektimhsh toy sfalmatos gia to polywnymo 2ou ba8moy einai
        %12.8f \n', maxerror2);
fprintf('H ektimhsh toy sfalmatos gia to polywnymo 4ou ba8moy einai
        %12.8f \n', maxerror4);
fprintf('H ektimhsh toy sfalmatos gia to polywnymo 6ou ba8moy einai
        %12.8f \n', maxerror6);
hold off;

```

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0,30769231	-1,25	96,72523090
4	0,30769231	3,8125	2592,07544886
6	0,30769231	-7,578125	66779,23921554

Παρατηρούμε ότι όταν βρισκόμαστε πολύ κοντά στο σημείο 0, το πολυώνυμο βαθμού 6 μας δίνει την καλύτερη παρεμβολή. Σαν δεύτερη μεγαλύτερη ακρίβεια, όσο είμαστε κοντά στο 0, έχουμε το πολυώνυμο βαθμού 4 και τελικά το πολυώνυμο βαθμού 2. Όμως, αντίστροφα, όσο απομακρυνόμαστε από το σημείο 0, έχουμε μικρότερο σφάλμα για το πολυώνυμο βαθμού 2 και το σφάλμα μεγαλώνει όταν αντίστοιχα μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και

των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα.

```

disp('ASKHSH 2'); clf; clear all;

xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);

shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = shmeia(i);
    a = matrixgenerator(x, n);
    [l, u] = lu(a);
    y = exp(-4*x.^2);
    yi = u\(l\y');
    for k = 1:601
        yy(i, k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me polywnymo parembolhs se %2d shmeia
            einai %12.8f \n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), xplot, yy(2,:), xplot, yy(3,:), xplot, yy(4,:),
      xplot, yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'b-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x^2) kai ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off

```

Σημεία	Σφάλμα
3	0,87267038
7	0,96786931
13	6,58057959
31	86,64594692
61	6,87406255

Μεγαλώνει μέχρι 31 ισαπέχοντα σημεία όπου έχουμε πάρα πολύ μεγάλο σφάλμα. Μετά, το σφάλμα ξανά-μικραίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας.

```
disp('ASKHSH 3'); clf; clear all;
xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    clear x;
    n = shmeia(i);
    for a = 0:(n-1)
        x(a+1) = 3*cos(((2*a)+1)/(n+1))*(pi/2));
    end
    a = matrixgenerator(x,n);
    [l, u] = lu(a);
    y = exp(-4*x.*2);
    yi = u\(l\y');
    for k = 1:601
        yy(i,k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me polywnymo parembolhs se %2d shmeia einai
        \n\n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), xplot, yy(2,:), xplot, yy(3,:), xplot, yy(4,:),
    xplot, yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'b-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x^2) kai ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off
```

Σημεία	Σφάλμα
3	0,99380400
7	0,68068888
13	0,20063964
31	0,00048050
61	0,00002323

Βλέπουμε ότι το σφάλμα μικραίνει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων στον οποίο σπάσαμε το διάστημα. Παρατηρούμε έτσι ότι ο τρόπος με τον οποίο διαλέγουμε τα σημεία του διαστήματος παίζει μεγάλο ρόλο στα αποτελέσματα του σφάλματος.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ'ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ'ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$.

```

disp('ASKHSH 4'); clf; clear all;

xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);

shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    clear x;
    clear y;
    clear yi;
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = length(x);
    for k=1:n
        y(k) = exp(-4*x(k).^2);
    end

    xi=-3:0.1:3;
    yi=interp1(x, y, xi, 'spline');
```

```

    for k = 1:601
        yy(i,k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me kubikes splines se %2d shmeia einai
            \%12.8f \n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), 'b-', xplot, yy(2,:), 'g:', xplot, yy(3,:), 'r-. ',
      xplot, yy(4,:), 'c--', xplot, yy(5,:), 'm-'); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'k-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x·2) kai ta kubika splines');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -2 8]); hold off

disp('Press any key to see the 2nd figure');
pause;
clf;

xplot2 = linspace(-5, 5, 1001);
expplot2 = exp(-4*xplot2.*xplot2);

clear x;
clear y;
clear yi;
x = linspace(-5, 5, shmeia(3));
n = length(x);
for k=1:n
    y(k) = exp(-4*x(k).^2);
end

xi2=-5:0.1:5;
yi2=interp1(x, y, xi2, 'spline');

for k = 1:1001

```

```

yy2(k) = evaluatepolynomial(yi2, n, xplot2(k));
end
error = max(abs(expplot2-yy2));
fprintf('To sfalma me kubikes splines se \%2d shmeia einai
        \%12.8f \n', shmeia(3), error);

plot(xplot2, yy2, 'b-. '); hold on;
legend('13 shmeia');
plot(xplot2, expplot2, 'k-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x·2) kai kubiko spline se 13 shmeia');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -1 9]); hold off

```

Διάστημα $[-3, 3]$	
Σημεία	Σφάλμα (με 601 ισαπέχοντα σημεία)
3	1,35666667
7	153,95610447
13	1080,5327780
31	298319867521585,5
61	3445502887858862600
Διάστημα $[-5, 5]$	
Σημεία	Σφάλμα (με 1001 ισαπέχοντα σημεία)
13	639278,56668671

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα αυξάνει όσο παίρνουμε περισσότερα σημεία. Στην γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι κοντά στα σημεία 1 και -1, τα splines είναι πολύ κοντά στην αρχική συνάρτηση. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων, τα splines παραμένουν πιο κοντά από την αρχική συνάρτηση (όταν πάμε προς το -2) όμως έχουν αντίστοιχα πολύ μεγάλο σφάλμα όταν ξεπερνάνε το -2.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Έστω ότι ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ταχύτητα του δικτύου στο χρονικό διάστημα $[0, 3]$ σε 41 ισαπέχοντα σημεία. Υπολογίστε τα πολυώνυμα βαθμού 0 και 1 που προσεγγίζουν τα δεδομένα με τον καλύτερο τρόπο. Υπολογίστε όλους τους δείκτες για τα πολυώνυμα που θα βρείτε, όπως στο παράδειγμα 1. Χρησιμοποιήστε το Excel σε όλους σας τους υπολογισμούς. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

Σημεία	Δεδομένα					
1	2.07458	1.78801	2.07548	1.97954	2.08945	1.63480
7	2.03053	1.74630	1.79267	1.42920	1.14101	1.32438
13	1.17944	0.93214	0.87631	0.80062	0.69002	0.79622
19	0.73527	0.60637	0.80011	0.95631	0.64858	0.95624
25	0.62853	0.55175	0.90018	1.00167	0.60299	1.05339
31	0.87300	0.99931	1.01089	1.11733	0.95633	1.15222
37	1.09389	0.86498	1.04563	1.11432	1.15554	

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 0ου βαθμού (SSE) = 17,9818.

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 1ου βαθμού (SSE) = 4,9811.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

```
disp('ASKHSH 5'); clf; clear all;
x = linspace(0,3,41); n = length(x);

y = [ 2.07458  1.78801  2.07548  1.97954  2.08945  1.63480 ...
      2.03053  1.74630  1.79267  1.42920  1.14101  1.32438 ...
      1.17944  0.93214  0.87631  0.80062  0.69002  0.79622...
      0.73527  0.60637  0.80011  0.95631  0.64858  0.95624 ...
      0.62853  0.55175  0.90018  1.00167  0.60299  1.05339 ...
      0.87300  0.99931  1.01089  1.11733  0.95633  1.15222 ...
      1.09389  0.86498  1.04563  1.11432  1.15554 ];
```

```

sx = sum(x); sx2 = x*x'; sx3 = sum(x.*x.*x); sx4 = sum(x.*x.*x.*x);
sy = sum(y); sxy = x*y'; sx2y = sum(x.*x.*y);

mat = [n sx sx2; sx sx2 sx3; sx2 sx3 sx4];
rhs = [sy; sxy; sx2y];

synt = mat\rhs;
ypol = synt(1) + synt(2)*x + synt(3)*x.*x;

sse = (y-ypol)*(y-ypol)';

plot(x,y,'*k'); hold on;
plot(x,ypol,':b');
legend('dedomena','polyonimo ba8mou 2');
xlabel('x'); ylabel('y');
hold off;

```

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων (SSE) = 1,3911.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική πράσταση των σημείων αλλά και των πολυνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

```

disp('ASKHSH 6'); clf; clear all;
x = linspace(0,3,41); n = length(x);

y = [ 2.07458  1.78801  2.07548  1.97954  2.08945  1.63480 ...
      2.03053  1.74630  1.79267  1.42920  1.14101  1.32438 ...
      1.17944  0.93214  0.87631  0.80062  0.69002  0.79622...
      0.73527  0.60637  0.80011  0.95631  0.64858  0.95624 ...
      0.62853  0.55175  0.90018  1.00167  0.60299  1.05339 ...
      0.87300  0.99931  1.01089  1.11733  0.95633  1.15222 ...
      1.09389  0.86498  1.04563  1.11432  1.15554 ];

```

```

synt4 = polyfit(x, y, 4);
ypoly4 = polyval(synt4, x);
sse = (y-ypoly4)*(y-ypoly4)';

synt8 = polyfit(x, y, 8);
ypoly8 = polyval(synt8, x);
sse = (y-ypoly8)*(y-ypoly8)';

plot(x, y, '*k'); hold on;
plot(x, ypoly4, '--b');
plot(x, ypoly8, '-.r');
legend('dedomena', 'polyonimo βαθμου 4', 'polyonimo βαθμου 8');
xlabel('x'); ylabel('y');
hold off;

```

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 4ου βαθμού (SSE) = 0,9124.

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 8ου βαθμού (SSE) = 0,9124.

Παρατηρούμε ότι σ'αυτήν την περίπτωση, όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου, μικραίνει και το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους (Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gv ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες.

```

disp('EPANALHPTIKH ASKSH'); clf; clear all;

x0 = 72;
y0 = 197;

shmeia = [
    191 322

```

187 326
186 330
185 334
186 338
187 342
190 346
194 350
198 354
201 358
202 362
199 366
196 370
197 374
201 377
203 378
204 379
207 378
213 374
219 370
224 368
226 370
222 374
218 378
215 382
212 386
210 390
209 394
208 396
207 398
206 396
205 394
203 396
201 398
201 402
203 406
209 410
213 414
216 418

```

216 419
221 419
223 418
220 422
217 426
216 422
216 420
214 422
211 426
212 430
213 434
219 438
223 442
229 446
233 450
237 454
240 458
242 462
244 466
244 470
243 474
243 478
242 482
242 486
244 490
245 494
248 498
250 502
254 506
257 510
];

%%8a baloume twra thn katw aristerh gwnia ths ikonas sto shmeio (0,0)
for i=1 : (size(shmeia,1)),
    x(i) = shmeia(i, 1) - x0;
end

for i=1 : (size(shmeia,1)),

```

```

        y(i) = shmeia(i, 2) - y0;
    end

    sum = 0;
    for i=1 : (size(shmeia,1)-1),
        t(i) = sum;
        sum = sum + sqrt( (x(i+1) - x(i))·2 + (y(i+1)-y(i))·2 );
    end
    t(i+1) = sum;

    tt = 0 : 0.05 : sum;

    xx = spline(t, x, tt);
    yy = spline(t, y, tt);

    axis([0 350 0 350]);
    hold on;
    plot(xx, yy);
    title('Grafikh parastash tou profil tou koritsiou');
    hold off;

```

Έχουμε διαλέξει την παρεμβολή με splines και παίρνουμε αρκετές συντεταγμένες των σημείων του προφίλ για μεγαλύτερη ακρίβεια.