

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**  
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

**PAMMOY MARIA-AIKATERINH, AEM:278, USERNAME:marammou.**

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:** Υπολογίστε το βαθμό  $n$  του πολυωνύμου  $p$  (σύμφωνα με τη μέθοδο Taylor ως προς το σημείο 0) το οποίο προσεγγίζει τη συνάρτηση  $\cos(x)$  με σφάλμα μικρότερο ή ίσο  $\frac{1}{2}10^{-5}$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Σχεδιάστε το πολυώνυμο και την  $\cos(x)$  στην ίδια γραφική παράσταση για το διάστημα  $[-3\pi/2, 3\pi/2]$ . ♣

Η Μέθοδος Taylor μας δίνει το πολυώνυμο στη μορφή  $f(x) = f(x_0) + (x - x_0) * f'(x_0) + ((x - x_0)^2 * f''(x_0))/2! + \dots$ . Εδώ το  $x_0$  είναι 0 και η παράγωγος του  $\cos'(x_0) = -\sin'(x_0)$  και το αντίστροφο, άρα τα πρόσημα του πολυωνύμου πάνε εν αλλιάξ. Έτσι έχουμε  $f(x) = 1 - (x^2)/2 + (x^4)/4! - (x^6)/6! + (x^8)/8! - (x^{10})/10! + (x^{12})/12! - (x^{14})/14!$ . Το ότι ο βαθμός του πολυωνύμου είναι 14 το βρίσκουμε από το σφάλμα αφού προκύπτει πως  $(x^{n+1}/(n+1)!) \leq 0.5 * 10^{-5}$ .

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης  $\frac{1}{1+25x^2}$ , καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα  $[-1, 1]$ . Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0,30769231	-1,25	96,7252309
4	0,30769231	3,8125	2592,07544886
6	0,30769231	-7,578125	58431,8343136

Το πολυώνυμο βαθμού 2 ως προς το σημείο 0 της δοθείσας συνάρτησης είναι το  $T(2) = f(0) + f'(0) * x/1! + f''(0) * x^2/2!$ .

Ομοίως το  $T(4) = T(2) + f'''(0) * x^3/3! + f^{(4)}(0) * x^4/4!$

και το  $T(6) = T(4) + f^{(5)}(0) * x^5/5! + f^{(6)}(0) * x^6/6!$

Όσο μεγαλύτερου βαθμού είναι το πολυώνυμο τόσο μεγαλύτερο γίνεται το σφάλμα. Στο διάστημα περίπου  $[-0.3, 0.3]$  τα πολυώνυμα φαίνεται πως προσεγγίζουν πιο πολύ τη συνάρτηση (αυτό το βλέπουμε από τη γραφική παράσταση).

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση  $f(x) = \exp(-4x^2)$  σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-3, 3]$ . Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία

στο παραπάνω διάστημα. ♣

Ο πίνακας όπου φαίνεται το εκάστοτε σφάλμα είναι ο εξής:

Σημεία	Σφάλμα
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594694
61	6.87406189

♣

Περιμένουμε πως καθώς αυξάνονται τα σημεία προσέγγισης πρέπει να έχουμε και καλύτερη προσέγγιση. Ωστόσο αυτό δεν ισχύει γιατί όσο αυξάνονται τα σημεία το σφάλμα μεγαλώνει. Αυτό γίνεται γιατί το πολυώνυμο που προκύπτει είναι πιο πολύπλοκο κι έτσι υπάρχει μεγαλύτερη απόκλιση από τα αρχικά σημεία.

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left( \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

Ο πίνακας όπου φαίνεται το εκάστοτε σφάλμα είναι ο εξής:

Σημεία	Σφάλμα
3	0.87268002
7	0.96788020
13	6.56100596
31	87.10255427
61	6.88373770

♣

Παρατηρούμε πως ανεξαρτήτως του αν τα σημεία είναι ισαπέχοντα ή αν βρίσκονται με τον τύπο που δίνεται στην άσκηση 3 οι τιμές για το σφάλμα είναι αντίστοιχα παρόμοιες (είναι της ίδιας τάξης).

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την  $f(x) = \exp(-4x^2)$ , σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα  $[-3, 3]$ . Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ' ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ' ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την  $f$  στο  $[-5, 5]$ . Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-5, 5]$ . ♣

Ο πίνακας όπου φαίνεται το εκάστοτε σφάλμα για 601 σημεία είναι ο εξής:

Σημεία	Σφάλμα
7	0.2534
13	0.0116
31	9.3140e-004
61	5.2400e-005



Καθώς δίνουμε περισσότερα σημεία έχουμε και μικρότερο σφάλμα. Έτσι, όπως φαίνεται και σχηματικά για περισσότερα σημεία η παρεμβολή είναι πιο ακριβής και πλησιάζει στην γραφική παράσταση της αρχικής συνάρτησης.

Β' σκέλος. Στο διάστημα  $(-5,5)$  και για προσέγγιση σε 13 σημεία, σχεδιάζοντας τη γραφική παράσταση σε 1001 σημεία το σφάλμα είναι 0.1384

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.** Η άσκηση βρίσκεται σε EXCEL Worksheet το οποίο παρατίθεται μαζί με τα υπόλοιπα αρχεία.

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2<sup>ου</sup> βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών για πολυώνυμο δευτέρου βαθμού είναι 1.39110942

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών για πολυώνυμο 4ου και 8ου βαθμού είναι 0.91238292 και 0.66550637 αντίστοιχα.