

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

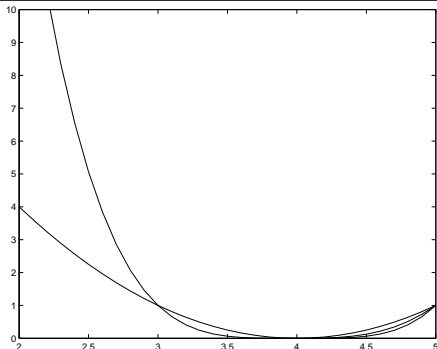
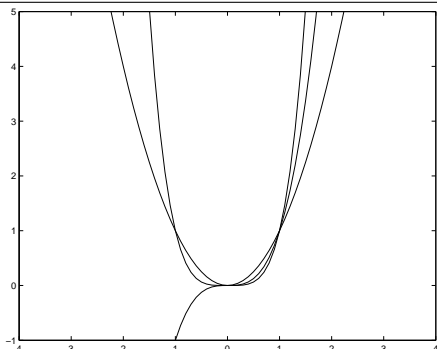
ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

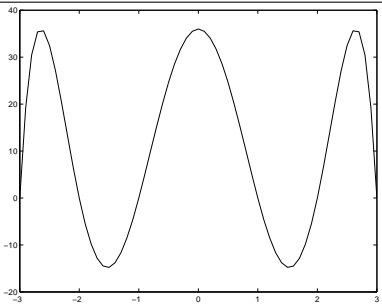
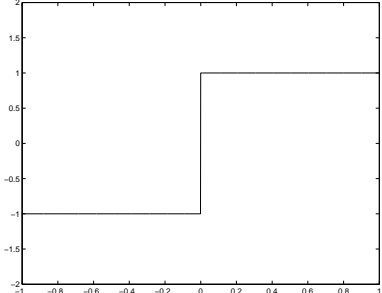
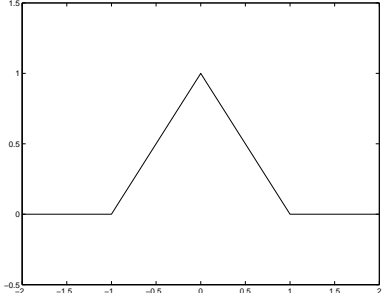
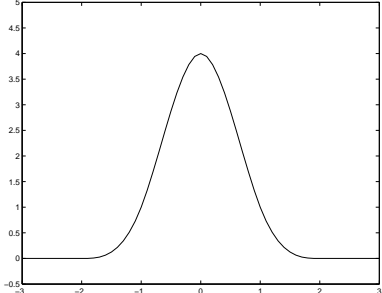
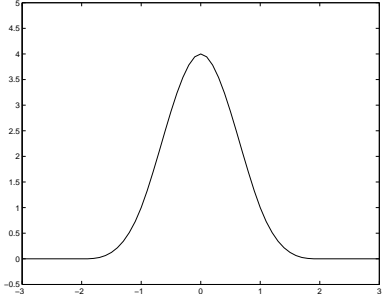
ΜΕΘΟΔΟΣ TAYLOR ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ.

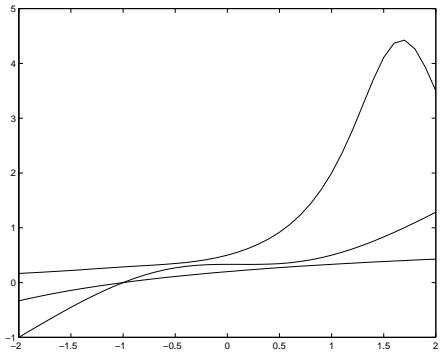
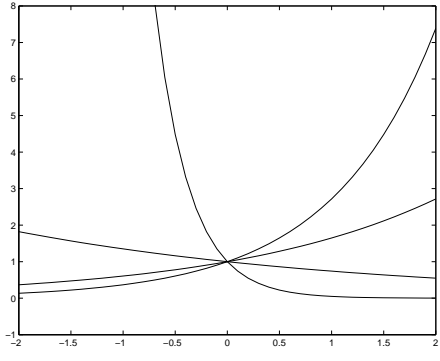
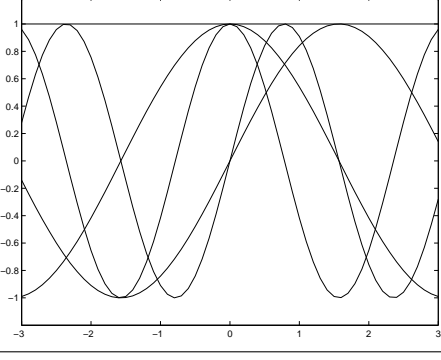
Πρόβλημα: Με δεδομένη μια συνάρτηση $f(x)$ ή ενός πίνακα με τιμές της f

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_{n-1}) & f(x_n) \end{pmatrix}$$

βρείτε μια “απλή” και “ομαλή” συνάρτηση $\phi(x)$, η οποία να είναι μια “καλή προσέγγιση” της $f(x)$, δηλαδή η απόσταση $\|f - \phi\|$ να είναι “μικρή”. Συνήθως επιλέγεται μια συνάρτηση ϕ που να μπορεί να αναπαρασταθεί σαν γραμμικός συνδυασμός “γνωστών”, πολύ ομαλών συναρτήσεων $\{B_i(x)\}_{i=1}^N$, οι οποίες αποκαλούνται συναρτήσεις βάσης και είναι γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Η παράμετρος N ονομάζεται διάσταση του χώρου προσέγγισης στον οποίο ανήκει η ϕ ή αλλιώς βαθμοί ελευθερίας της ϕ . Τελικά: $f(x) \approx \phi(x) = \sum_{i=1}^N a_i B_i(x)$.

Μέθοδος	Συναρτήσεις βάσης $B_i(x)$	Γραφική παράσταση συναρτήσεων βάσης
Taylor	$1, (x - a), (x - a)^2, \dots, (x - a)^n$	 $(x - 4)^4, (x - 4)^3, (x - 4)^2$
Πολυωνυμική παρεμβολή	$1, x, x^2, \dots, x^n$	 x^4, x^3, x^2

Μέθοδος	Συναρτήσεις βάσης $B_i(x)$	Γραφική παράσταση συναρτήσεων βάσης
Πολυωνυμική παρεμβολή Lagrange	$\prod_{j=0, i \neq j}^n (x - x_j)/(x_i - x_j), \quad i = 0 : n$	 $-(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$
Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή (με σταθερές συναρτήσεις)	$-1, \quad -1 \leq x \leq 0$ $1, \quad 0 \leq x \leq 1$	
Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή (με γραμμικές συναρτήσεις)	$\begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 1-x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 1 < x \end{cases}$	
Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή (με κυβικές splines)	$\begin{cases} (x+2)^3, & -2 \leq x \leq -1 \\ 1+3(1+x)+3(1+x)^2-3(1+x)^3, & -1 \leq x < 0 \\ 1+3(1-x)+3(1-x)^2-3(1-x)^3, & 0 \leq x < 1 \\ (2-x)^3, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x < -2, x > 2 \end{cases}$	
Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή (με κυβικές hermite)	$\begin{cases} (x+1)^2(1-2x), & -1 \leq x \leq 0 \\ (1-x)^2(1+2x), & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x < -1, x > 1 \end{cases}$	

Μέθοδος	Συναρτήσεις βάσης $B_i(x)$	Γραφική παράσταση συναρτήσεων βάσης
Παρεμβολή με ρητές συναρτήσεις	$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}$	
Παρεμβολή με εκθετικές συναρτήσεις	$\exp(ax)$	
Τριγωνομετρική Παρεμβολή (Σειρές Fourier)	$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx)$	

Πίνακας 1. Μέθοδοι παρεμβολής, οι συναρτήσεις βάσης και οι γραφικές αναπαραστάσεις τους.

Πολυωνυμική προσέγγιση.

Ισχυρισμός. (Weierstrass) Εάν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, b]$, τότε για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα πολύωνμο $p_n(x)$ βαθμού $n = n(\epsilon)$, τέτοιο ώστε $\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| < \epsilon$.

Μέθοδος 1: Σειρές Taylor για την προσέγγιση “ομαλών” συναρτήσεων.

Ισχυρισμός. Έστω ότι η $f(x)$ ισούται με το ανάπτυγμα της σειράς Taylor στο σημείο a :

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$. Έστω $T_n(x)$ το πολύωνμο Taylor βαθμού n της f στο a . Αφού η f ισούται με το ανάπτυγμα της σειράς Taylor, $T_n(x) \rightarrow f(x)$ καθώς $n \rightarrow \infty$ και άρα το T_n μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν μια προσέγγιση της f : $f(x) \approx T_n(x)$. Θα θέλαμε ωστόσο να ξέρουμε πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το n ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ακρίβεια. Για το σκοπό αυτό πρέπει να δούμε το μέγεθος του υπολοίπου:

$$|R_n(x)| = |f(x) - T_n(x)|$$

Σημείωση: Σύμφωνα με την προσέγγιση με σειρές Taylor, μια ομαλή συνάρτηση f μπορεί να προσεγγιστεί από το πολυώνυμο Taylor βαθμού n , $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$. Ο βαθμός του πολυωνύμου καθορίζεται από την επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης.

Ανάλυση σφάλματος της μεθόδου Taylor

Υπάρχουν τρεις τρόποι εκτίμησης του μεγέθους του σφάλματος:

1. Κατασκευάζουμε τη γραφική παράσταση του $|R_n(x)|$ και εκτιμούμε το σφάλμα από αυτήν.
2. Εάν η σειρά είναι μια εναλλασσόμενη σειρά, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Εκτίμησης Εναλλασσόμενων Σειρών (Alternating Series Estimation Theorem).
3. Σε όλες τις περιπτώσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Taylor, σύμφωνα με τον οποίο:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

όπου z είναι ένας αριθμός που βρίσκεται μεταξύ των x και a .

Παραδείγματα: Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Taylor μπορείτε να πάρετε τα παρακάτω αναπτύγματα συναρτήσεων:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3 + \frac{1}{32}(x-2)^4 + O((x-2)^5)$$

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

$$\sin(x) = -(x-\pi) + \frac{1}{6}(x-\pi)^3 + O((x-\pi)^5)$$

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4 + O((x-1)^5)$$

$$\csc(x) = 1 + \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\pi)^2 + \frac{5}{24}(x - \frac{1}{2}\pi)^4 + O((x - \frac{1}{2}\pi)^5)$$

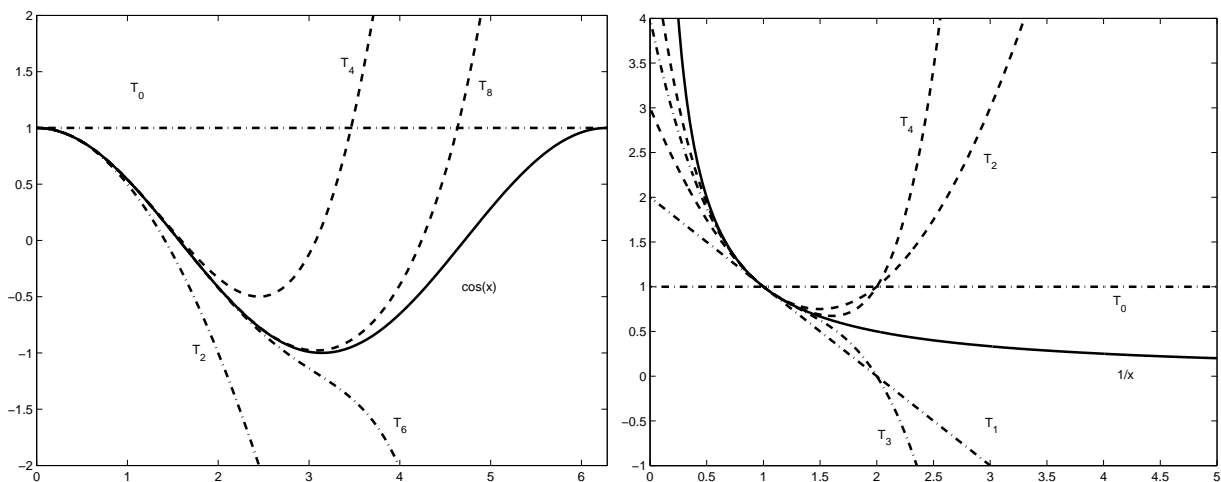
$$2\sin^2(x) = 2(x-\pi)^2 - \frac{2}{3}(x-\pi)^4 + O((x-\pi)^6)$$

$$1 - \cos(2x) = 2(x-\pi)^2 - \frac{2}{3}(x-\pi)^4 + O((x-\pi)^5)$$

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \cos(x)$, τότε η προσέγγιση της ως προς το 0, με τον τύπο του Taylor και με πολυώνυμο βαθμού 0, 2, 4, 6 και 8 (βλ. Σχήμα 1), δίδεται αντίστοιχα από:

$$T_0(x) = 1, \quad T_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad T_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}, \quad T_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$\text{και } T_8(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}.$$



Σχήμα 1. Οι συναρτήσεις $\cos(x)$ (αριστερά) και $\frac{1}{x}$ (δεξιά) με τις προσεγγίσεις τους.

Παράδειγμα: Αν $f(x) = \frac{1}{x}$, η προσέγγιση της ως προς το 1, με τον τύπο του Taylor και με πολυώνυμα βαθμού 0, 1, 2, 3 και 4 (βλ. Σχήμα 1), δίδεται αντίστοιχα από:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = 1 - x, \quad T_2(x) = 1 - x + x^2, \quad T_3(x) = 1 - x + x^2 - x^3 \text{ και } T_4(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4.$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Υπολογίστε το βαθμό n του πολυωνύμου p (σύμφωνα με τη μέθοδο Taylor ως προς το σημείο 0) το οποίο προσεγγίζει τη συνάρτηση $\cos(x)$ με σφάλμα μικρότερο ή ίσο $\frac{1}{2}10^{-5}$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Σχεδιάστε το πολυώνυμο και την $\cos(x)$ στην ίδια γραφική παράσταση για το διάστημα $[-3\pi/2, 3\pi/2]$. ♣

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2			
4			
6			

Σημείωση/Υπόδειξη. Δίνονται οι παράγωγοι της $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -\frac{50}{(1+25x^2)^2} x \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 50 \frac{75x^2-1}{(1+25x^2)^3} \\ \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15000x \frac{-1+25x^2}{(1+25x^2)^4} \\ \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15000 \frac{1+3125x^4-250x^2}{(1+25x^2)^5} \\ \frac{d^5}{dx^5} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -3750000x \frac{3+1875x^4-250x^2}{(1+25x^2)^6} \\ \frac{d^6}{dx^6} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 11250000 \frac{-1+525x^2-21875x^4+109375x^6}{(1+25x^2)^7} \\ \frac{d^7}{dx^7} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15750000000x \frac{-1+175x^2-4375x^4+15625x^6}{(1+25x^2)^8} \\ \frac{d^8}{dx^8} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15750000000 \frac{1-900x^2-1312500x^6+3515625x^8+78750x^4}{(1+25x^2)^9} \end{aligned}$$

Μέθοδος 2: Πολυωνυμική Παρεμβολή Συναρτήσεων και Δεδομένων

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2: Υπολογίστε την πολυωνυμική προσέγγιση $p(x)$ της $f(x)$ στο διάστημα $[a, b]$, έτσι ώστε η $p(x)$ να συμφωνεί με την f στα σημεία $x = a : s : b$ (συμβολισμός Matlab). Λέμε ότι το p παρεμβάλλει την f στα παραπάνω σημεία. ♣

Αλγόριθμος 1(Μέθοδος Πίνακα): Το πολυώνυμο που ψάχνουμε πρέπει να ικανοποιεί τις n εξισώσεις $p(x) = f(x)$ στα σημεία $x = a : s : b$, όπου $n + 1 = \text{size}(x)$.

Η γενική μορφή ενός πολυωνύμου βαθμού n ως προς τη μεταβλητή x είναι:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

όπου a_0, a_1, \dots, a_n είναι σταθερές και $a_n \neq 0$. Ο βαθμός ενός πολωνύμου είναι η μεγαλύτερη δύναμη στην οποία είναι υψωμένη η μεταβλητή του. Κάθε πολυώνυμο είναι άθροισμα από όρους της μορφής ax^k , οι οποίοι ονομάζονται *μονώνυμα*, όπου a είναι μια σταθερά και k ένας μη αρνητικός ακέραιος. Ένα *διώνυμο* είναι το άθροισμα δύο μονώνυμων, ένα *τριώνυμο* είναι το άθροισμα τριών μονώνυμων κ.ο.κ. Η λύση του προβλήματος της πολυωνυμικής παρεμβολής συνίσταται στην επίλυση του παρακάτω προβλήματος πινάκων, όπου ο πίνακας των συντελεστών του συστήματος των γραμμικών εξισώσεων ονομάζεται πίνακας Vandermonde.

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

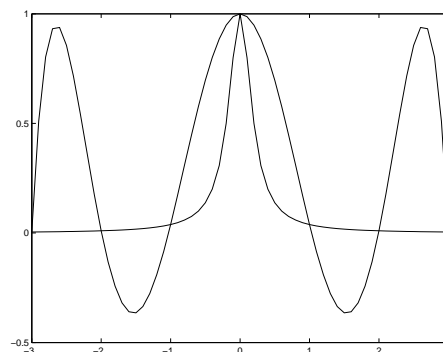
Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$. Βρείτε ένα πολυώνυμο βαθμού 6 το οποίο παρεμβάλλει την συνάρτηση στα σημεία $x = -3 : 3$. Σε αυτή την περίπτωση, η λύση της πολυωνυμικής παρεμβολής συνίσταται στην εύρεση των συντελεστών του πολωνύμου $a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = f(x)$ για $x = -3 : 3$, που ισοδυναμεί με την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων. Στο παράδειγμα αυτό ο πίνακας συντελεστών, το διάνυσμα των αγνώστων και διάνυσμα των τιμών της συνάρτησης είναι οι ακόλουθοι:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 9 & -27 & 81 & -243 & 729 \\ 1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 & 64 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 & 729 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0044 \\ 0.0099 \\ 0.0385 \\ 1.0000 \\ 0.0385 \\ 0.0099 \\ 0.0044 \end{bmatrix}$$

και η λύση είναι:

$$\begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \times 10^{-9} \\ -1.3048 \\ -4.0 \times 10^{-10} \\ 0.36962 \\ -1.4787 \times 10^{-11} \\ -2.6326 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Άρα το πολυώνυμο είναι το $p(x) = -0.026326x^6 + 0.36962x^4 - 1.3048x^2 + 1$.



Σχήμα 2. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$ και του πολωνύμου $p(x) = -0.026326x^6 + 0.36962x^4 - 1.3048x^2 + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣

Υπόδειξη: Γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `matrixgenerator(x, n)`, όπου `x` το διάνυσμα με τις τετμημένες των σημείων της παρεμβολής και `n` το πλήθος τους, η οποία υπολογίζει και επιστρέφει τον πίνακα του αντίστοιχου συστήματος προς λύση. Επίσης γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `evaluatepolynomial(poly, m, t)`, όπου `poly` είναι το διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου, `m` ο βαθμός του και `t` η τετμημένη του σημείου στο οποίο υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου. Η συνάρτηση θα επιστρέφει την τιμή του πολυωνύμου. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Horner για να τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου. Το πρόγραμμα σας θα έχει την παρακάτω μορφή:

```
...
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i=1:5
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = length(x);
    a = matrixgenerator(x, n);
    [L, U] = lu(a);
    y = exp(-4*x.^2);
    yi = U \ (L \ y');
    for k=1:n
        yy(k)=evaluatepolynomial(yi, n, x(k));
    end;
...
end
...
```

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

Σημείωση. Αυτή η μέθοδος πρέπει να αποφεύγεται, γιατί οι λύσεις των εξισώσεων Vandermode συμπεριφέρονται παράξενα για μεγάλα n .

Αλγόριθμος 2 (Μέθοδος Lagrange): Με αυτή τη μέθοδο η λύση του προβλήματος της πολυωνυμικής παρεμβολής δίνεται από τη σχέση:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x)$$

όπου τα σημεία παρεμβολής είναι τα $\{x_i, f(x_i)\}_{i=0}^n$ και $L_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n (x - x_j)/(x_i - x_j)$.

Παράδειγμα. Υπολογίστε τα πολυώνυμα παρεμβολής L_i δον βαθμού στα σημεία -3:1:3.

Λύση. Οι συναρτήσεις βάσεις $L_i(x)$ για αυτή την περίπτωση είναι:

1: $L_0(x) = (x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)/720,$

2: $L_1(x) = -(x+3)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)/120,$

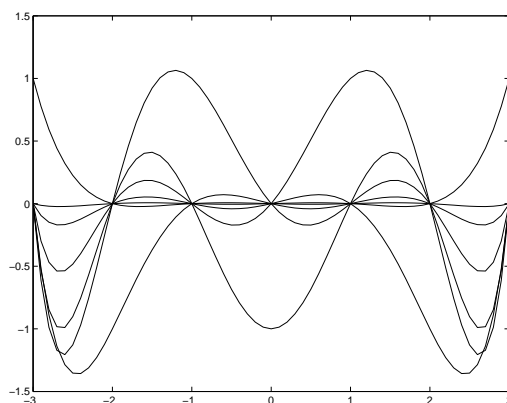
3: $L_2(x) = (x+3)(x+2)x(x-1)(x-2)(x-3)/48,$

4: $L_3(x) = -(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)(x-3)/36,$

5: $L_4(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x(x-2)(x-3)/48,$

6: $L_5(x) = -(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-3)/120,$

7: $L_6(x) = (x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)/720.$



Σχήμα 3. Τα πολυώνυμα $L_i, i = 0, \dots, n$ για το διάστημα $[-3, 3]$ και για 7 ισαπέχοντα σημεία.

Θεώρημα. Έστω $f \in C^{n+1}[a, b]$ και $p_n(x)$ το πολυώνυμο Lagrange βαθμού n που παρεμβάλλει τη συνάρτηση $f(x)$ στα σημεία $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Τότε, για κάθε $x \in [a, b]$ υπάρχει ένα ξ τέτοιο ώστε $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ και $\|f - p_n\| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\| h^{n+1}}{4(n+1)}$, όπου $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$.

Μέθοδος 3: Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή συναρτήσεων και δεδομένων

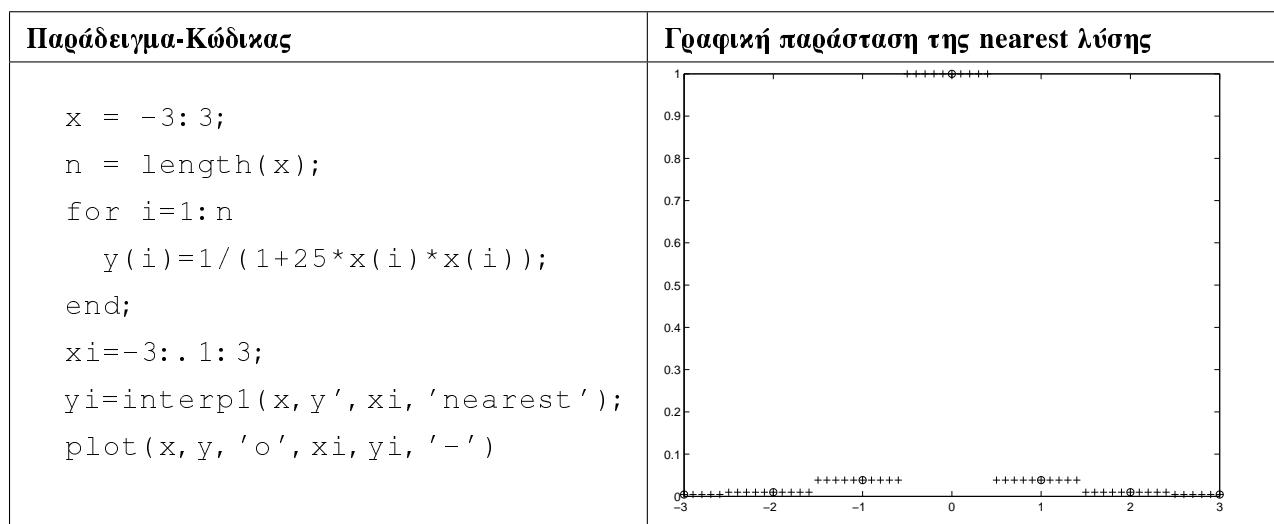
ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. Έστω η συνάρτηση $f|^{[a,b]}$ και n σημεία αυτής (x_i, y_i) , $i=1, \dots, n$, τέτοια ώστε $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Παρεμβάλετε κάθε ζεύγος συνεχόμενων σημείων με ένα πολυώνυμο βαθμού 0, 1 και 3 αντίστοιχα. Αυτές οι συναρτήσεις προσέγγισης ονομάζονται τμηματικά πολυώνυμα. Στην περίπτωση των πολυωνύμων τρίτου βαθμού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε ζεύγος γειτονικών πολυωνύμων είτε έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους (οπότε ονομάζονται **κυβικές spline Hermite**), είτε έχουν συνεχείς τόσο τις πρώτες όσο και τις δεύτερες παραγώγους, οπότε ονομάζονται **κυβικές splines**. ♣

Η συνάρτηση του Matlab `interp1` εκτελεί μονοδιάστατη παρεμβολή με τμηματικά πολυώνυμα βαθμού 0, 1 και 3, μια σημαντική λειτουργία για την ανάλυση δεδομένων και την προσαρμογή καμπυλών. Η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιεί πολυωνυμικές τεχνικές, προσαρμόζοντας τα δεδομένα με πολυωνυμικές συναρτήσεις μεταξύ των σημείων-μετρήσεων και υπολογίζει την τιμή του κατάλληλου πολυωνύμου παρεμβολής στο επιθυμητό σημείο παρεμβολής. Η πιο γενική μορφή της συνάρτησης είναι `yi=interp1(x, y, xi, method)`, όπου y είναι το διάνυσμα που περιέχει τιμές της άγνωστης συνάρτησης και x είναι ένα διάνυσμα ίδιου μήκους που περιέχει

τα σημεία στα οποία αντιστοιχούν οι τιμές του διανύσματος y , x_i είναι ένα διάνυσμα που περιέχει σημεία στα οποία θέλουμε να εκτελέσουμε παρεμβολή και `method` είναι ένα προαιρετικό αλφαριθμητικό που καθορίζει τη μέθοδο της παρεμβολής:

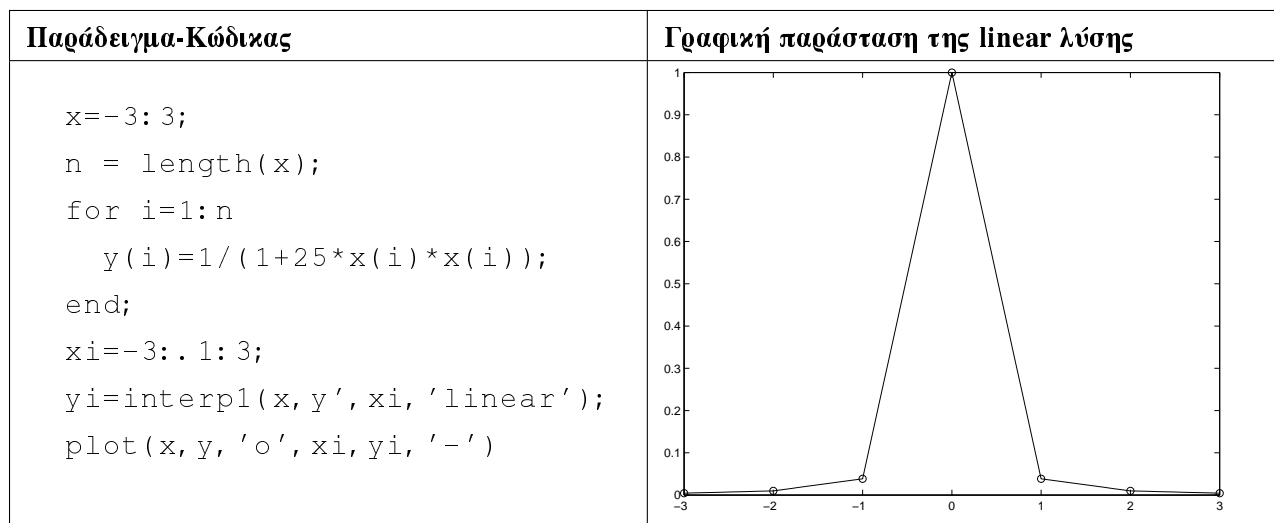
- *Παρεμβολή πλησιέστερου γείτονα - Nearest neighbor interpolation (method='nearest')*

Η μέθοδος αυτή θέτει την τιμή ενός σημείου παρεμβολής ίση με στην τιμή του πλησιέστερου σημείου δεδομένων.



- *Γραμμική παρεμβολή - Linear interpolation (method='linear')*

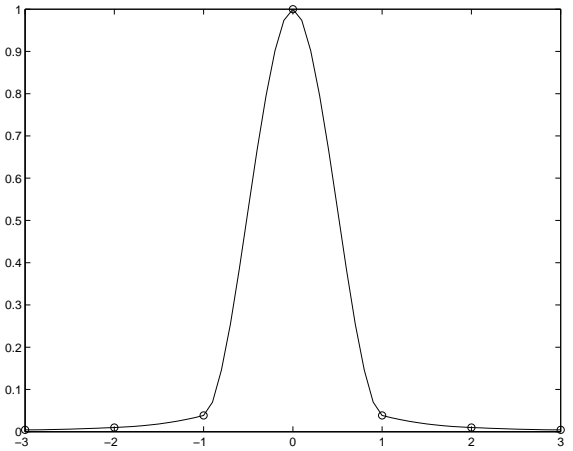
Η μέθοδος αυτή προσαρμόζει μια διαφορετική γραμμική συνάρτηση μεταξύ κάθε ζεύγους συνεχόμενων σημείων δεδομένων και επιστρέφει την τιμή της σχετικής συνάρτησης στα σημεία του διανύσματος x_i . Αυτή είναι η προκαθορισμένη μέθοδος της συνάρτησης `interp1`.



- *Παρεμβολή με κυβικές splines - Cubic spline interpolation (method='spline')*

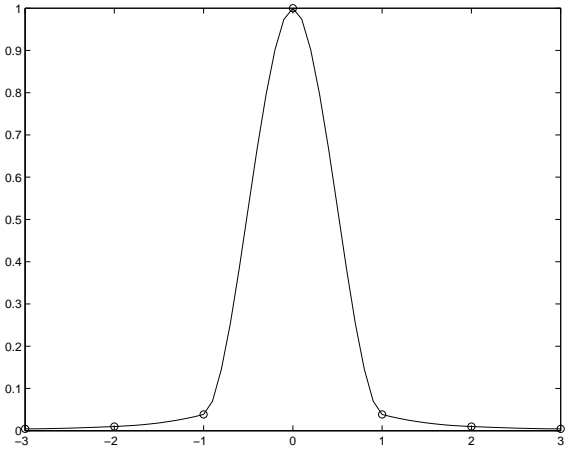
Αυτή η μέθοδος προσαρμόζει ένα διαφορετικό πολυώνυμο τρίτου βαθμού μεταξύ κάθε ζεύγους συνεχόμενων σημείων δεδομένων, και προσέχει ώστε τα πολυώνυμα να έχουν συνεχείς πρώτες και δεύτερες παραγώγους

στα άκρα τους. Τα τμηματικά αυτά πολυώνυμα μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των B-splines που ορίστηκαν στον Πίνακα 1(σελ. 2).

Παράδειγμα-Κώδικας	Γραφική παράσταση της cubic λύσης
<pre> x=-3:3; n = length(x); for i=1:n y(i)=1/(1+25*x(i)*x(i)); end; xi=-3:.1:3; yi=interp1(x,y,xi,'spline'); plot(x,y,'o',xi,yi,'-') </pre>	

- Κυβική Hermit τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή - Cubic piecewise Hermit polynomial interpolation (method='pchip' ή 'cubic')

Οι δύο αυτές μέθοδοι ('pchip' και 'cubic') είναι ταυτόσημες. Χρησιμοποιούν τη συνάρτηση pchip για να εκτελέσουν τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή Hermite ανάμεσα στα διανύσματα x και y. Οι μέθοδοι αυτοί διατηρούν τη μονοτονία και το σχήμα των δεδομένων. Εάν κάποιο σημείο xi είναι εκτός του διαστήματος που ορίζεται από τις μετρήσεις x, η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται για πρόβλεψη. Εναλλακτικά, η κλήση `yi=interp1(x,y,xi,method,extrapval)` αντικαθιστά τις προβλεπόμενες τιμές με το διάνυσμα extrapval. Η τιμή NaN χρησιμοποιείται συχνά για την extrapval. Να σημειωθεί τέλος ότι όλες οι μέθοδοι λειτουργούν και με μη ομοιόμορφα κατανεμημένες μετρήσεις.

Παράδειγμα-Κώδικας	Γραφική παράσταση της cubic λύσης
<pre> x=-3:3; n = length(x); for i=1:n y(i)=1/(1+25*x(i)*x(i)); end; xi=-3:.1:3; yi=interp1(x,y,xi,'cubic'); plot(x,y,'o',xi,yi,'-') </pre>	

Παράδειγμα. Σε αυτό το παράδειγμα επιλέξαμε σημεία παρεμβολής έξω από το διάστημα των μετρήσεων.

Παράδειγμα-Κώδικας	Γραφική παράσταση της pchip λύσης με σημεία παρεμβολής έξω από το διάστημα των μετρήσεων
<pre> x=-3:3; n = length(x); for i=1:n y(i)=1/(1+25*x(i)*x(i)); end; xi=-4:.1:4; yi=interp1(x,y,xi,'spline','extrap'); plot(x,y,'o',xi,yi,'-') </pre>	

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ'ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ'ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$. ♣

Παρεμβολή με Splines.

Η παρεμβολή με splines υλοποιείται στο Matlab και από την παρακάτω συνάρτηση:

```

yy=spline(x, y, xx)
pp=spline(x, y)

```

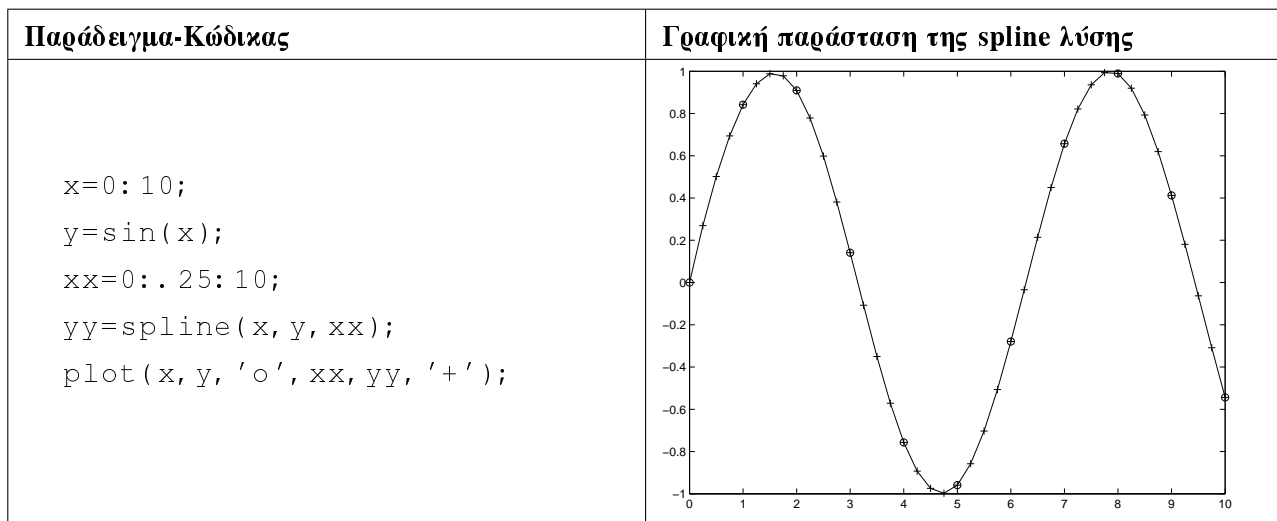
Η `yy=spline(x, y, xx)` χρησιμοποιεί παρεμβολή με κυβικές splines για να υπολογίσει το διάνυσμα `yy`, δηλαδή τις τιμές της συνάρτησης y στα σημεία `xx`. Το διάνυσμα `x` περιλαμβάνει τα σημεία στα οποία οι τιμές y είναι γνωστές. Εάν το y είναι ένας πίνακας, τότε τα δεδομένα θεωρούνται ότι είναι διανύσματα και η παρεμβολή γίνεται για κάθε γραμμή του y . Σε αυτή την περίπτωση, το μήκος του `x`, `length(x)` πρέπει να ισούται με `size(y, 2)`, ενώ το μέγεθος του `yy` είναι ίσο με `size(y, 1) × length(xx)`.

Προσοχή: Αυτό είναι αντίθετο από την συνάρτηση `interp1(x,y,xx,'spline')`, η οποία πραγματοποιεί παρεμβολή για κάθε στήλη του πίνακα y . Για αυτή τη συνάρτηση, το `length(x)` πρέπει να ισούται με `size(y, 1)` και η διάσταση του `yy` είναι ίση με `length(xx) × size(y, 2)`.

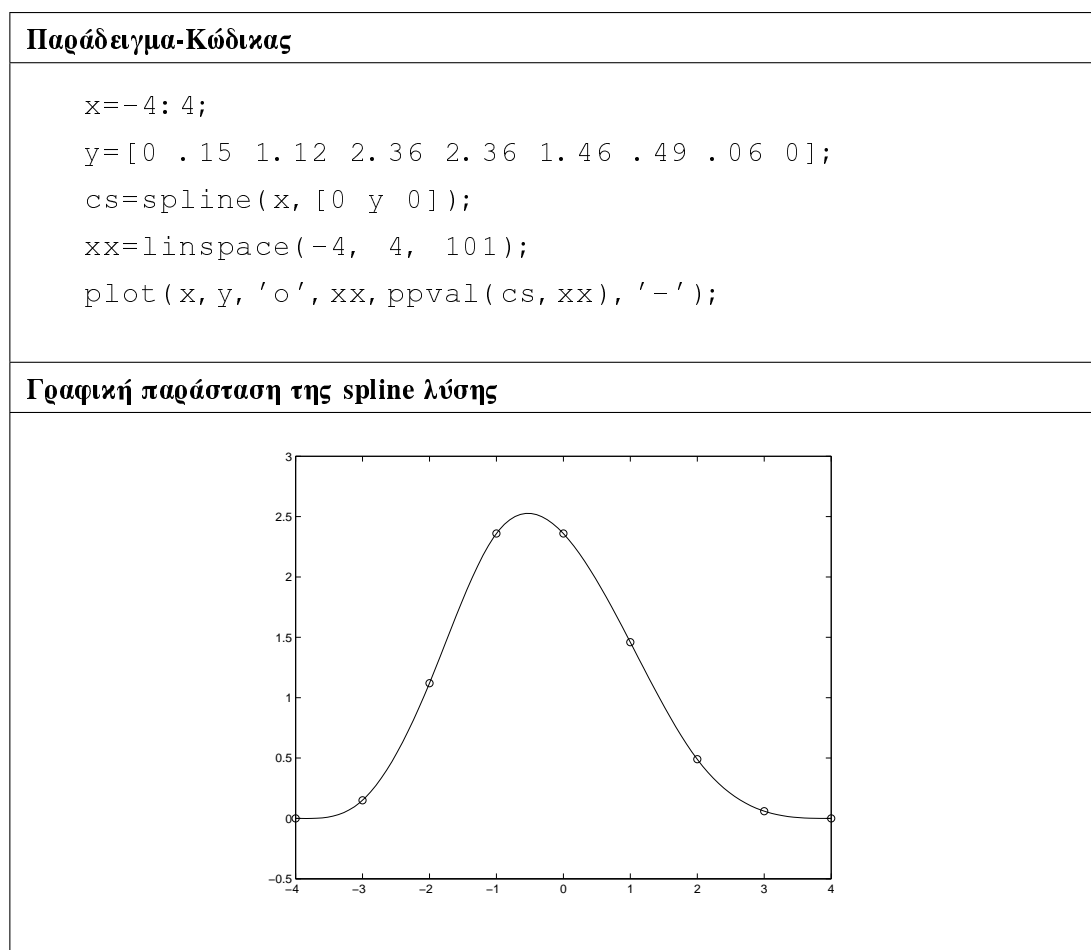
Η `pp=spline(x, y)` επιστρέφει τη μορφή του τμηματικού πολυωνύμου κυβικής spline της παρεμβολής, με σκοπό να χρησιμοποιηθεί από την `ppval` αλλά και το πρόγραμμα για splines `unmkpp`. Κανονικά δεν χρησιμοποιούνται συνθήκες τερματισμού (`not-a-knot`). Ωστόσο, εάν το y περιέχει περισσότερες τιμές από το x , τότε η πρώτη και η τελευταία τιμή του y χρησιμοποιούνται για την κλίση της παραγόμενης spline στα άκρα της. Συγκεκριμένα: `f(x)=y(:, 2:end-1)`, `df(min(x))=y(:, 1)`, `df(max(x))=y(:, end)`

Εφαρμογές με splines.

Παράδειγμα 1. Στο παράδειγμα δημιουργείται πρώτα μια καμπύλη ημιτόνου και στη συνέχεια γίνεται παρεμβολή με spline πάνω σε ένα πυκνό πλέγμα σημείων.



Παράδειγμα 2. Αυτό το παράδειγμα περιγράφει την επιβαλλόμενη ή πλήρη παρεμβολή με splines, όπου καθορίζονται οι κλίσεις της spline στα άκρα της. Συγκεκριμένα, ζητείται να κατασκευαστεί μια spline που να παρεμβάλλεται σε συγκεκριμένο σύνολο μετρήσεων, η οποία να έχει μηδενικές κλίσεις στα άκρα της.



Παράδειγμα 3. Τα δύο διανύσματα

```

t=1900:10:1990; p=[75.995 91.972 105.711 123.203 131.669 150.697
179.323 203.212 226.505 249.633];

```

παριστάνουν τα χρόνια απογραφής από το 1900 μέχρι το 1990 στις Ηνωμένες Πολιτείες και τον πληθυσμό σε εκατομμύρια ανθρώπων. Η έκφραση `spline(t, p, 2000)` χρησιμοποιεί παρεμβολή με κυβικές splines για να προβλέψει τον πληθυσμό το έτος 2000. Το αποτέλεσμα είναι `ans=270.6060`.

Παράδειγμα 4. Οι εντολές

```
x=pi*[0:.5:2];  
y=[0 1 0 -1 0 1 0 ; 1 0 1 0 -1 0 1];  
pp=spline(x,y);  
yy=ppval(pp,linspace(0,2*pi,101));  
plot(yy(1,:),yy(2,:), '-b', y(1,2:5), y(2,2:5), 'or')
```

κατασκευάζουν τη γραφική παράσταση ενός κύκλου, με τα πέντε σημεία δεδομένων $y(:,2), \dots, y(:,6)$ να σημειώνονται με ο. Το διάνυσμα y περιέχει δύο παραπάνω τιμές (δηλ. δύο παραπάνω στήλες) από το x , έτσι οι τιμές $y(:,1)$ και $y(:,end)$ χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό της κλίσης στα άκρα.

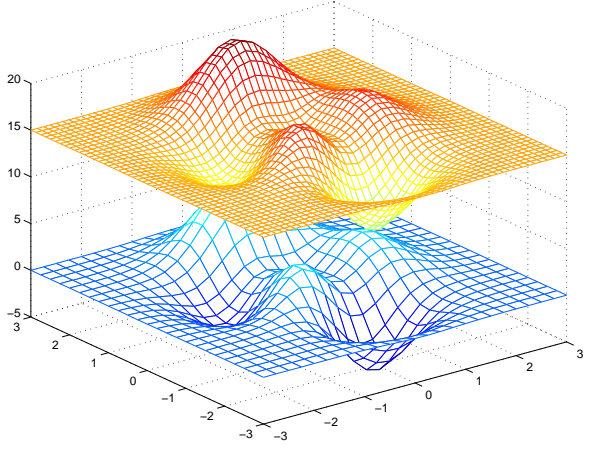
Ταχύτητα, Μνήμη και Ομαλότητα.

Όταν επιλέγουμε μια μέθοδο παρεμβολής, πρέπει να έχουμε στο μυαλό μας ότι κάποιες απαιτούν περισσότερη μνήμη ή περισσότερο υπολογιστικό χρόνο από τις άλλες. Ωστόσο, συνήθως θέλουμε να εξισορροπήσουμε αυτούς τους πόρους, ώστε να επιτύχουμε την επιθυμητή ομαλότητα στο αποτέλεσμα. Η μέθοδος του πλησιέστερου γείτονα είναι η γρηγορότερη, ωστόσο παράγει τα χειρότερα αποτελέσματα, όσον αφορά την ομαλότητα. Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής χρειάζεται περισσότερη μνήμη από την μέθοδο του πλησιέστερου γείτονα, και απαιτεί ελαφρώς περισσότερο χρόνο. Επιπλέον, σε αντίθεση με τη μέθοδο του πλησιέστερου γείτονα, τα αποτελέσματά της είναι συνεχή, αλλά η κλίση αλλάζει απότομα στα σημεία των μετρήσεων. Η παρεμβολή με κυβικές splines έχει τον μεγαλύτερο συγκριτικά χρόνο εκτέλεσης, αν και απαιτεί λιγότερο χρόνο από τη μέθοδο της κυβικής παρεμβολής. Παράγει μάλιστα τα ομαλότερα αποτελέσματα από όλες τις μεθόδους παρεμβολής. Ωστόσο μπορεί να δώσει απροσδόκητα αποτελέσματα στην περίπτωση που τα σημεία των μετρήσεων δεν είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα και κάποια σημεία είναι πολύ κοντά μεταξύ τους σε σχέση με τα υπόλοιπα. Η κυβική παρεμβολή απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο και μνήμη τόσο από τη μέθοδο του πλησιέστερου γείτονα όσο και από τη γραμμική παρεμβολή. Ωστόσο, τόσο τα παρεμβαλλόμενα σημεία, όσο και η πρώτη παράγωγός τους είναι συνεχείς. Τα σχετικά πλεονεκτήματα κάθε μεθόδου εξακολουθούν να ισχύουν ακόμη και για την περίπτωση της παρεμβολής σε διδιάστατους και σε πολυδιάστατους χώρους.

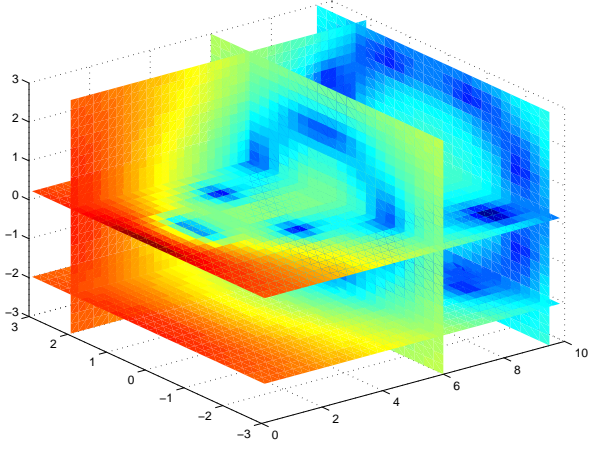
Παρεμβολή σε συναρτήσεις με 2-D και 3-D πεδία ορισμού.

Σημείωση. Το Matlab έχει παρόμοιες συναρτήσεις για διδιάστατα και τριδιάστατα δεδομένα. Τα δύο παραδείγματα που ακολουθούν περιγράφουν τη χρήση τους.

Παράδειγμα. Εκτελέστε παρεμβολή στη συνάρτηση `peaks`, σε ένα λεπτομερές πλέγμα σημείων χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση `interp2`. Η προκαθορισμένη μέθοδος παρεμβολής είναι η γραμμική `spline`.

Παράδειγμα-Κώδικας	Γραφική παράσταση της interp2 λύσης
<pre> [X, Y]=meshgrid(-3:.25:3); Z=peaks(X, Y); [XI, YI]=meshgrid(-3:.125:3); ZI=interp2(X, Y, Z, XI, YI); mesh(X, Y, Z); hold; mesh(XI, YI, ZI+15); hold off; axis([-3 3 -3 3 -5 20]) exit </pre>	

Παράδειγμα. Παρεμβολή σε τρισδιάστατα δεδομένα χρησιμοποιώντας τμηματικά πολυώνυμα (προκαθορισμένη μέθοδος) με τη συνάρτηση `interp3` του Matlab.

Παράδειγμα-Κώδικας
<pre> [x, y, z, v]=flow(10); [xi, yi, zi]=meshgrid(.1:.25:10, -3:.25:3, -3:.25:3); vi=interp3(x, y, z, v, xi, yi, zi); slice(xi, yi, zi, vi, [6 9.5], 2, [-2 .2]); shading flat exit </pre>
Γραφική παράσταση της interp3 λύσης


Αντίστροφη Παρεμβολή

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. Έστω ότι δίνεται ένας πίνακας δεδομένων για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x}$:

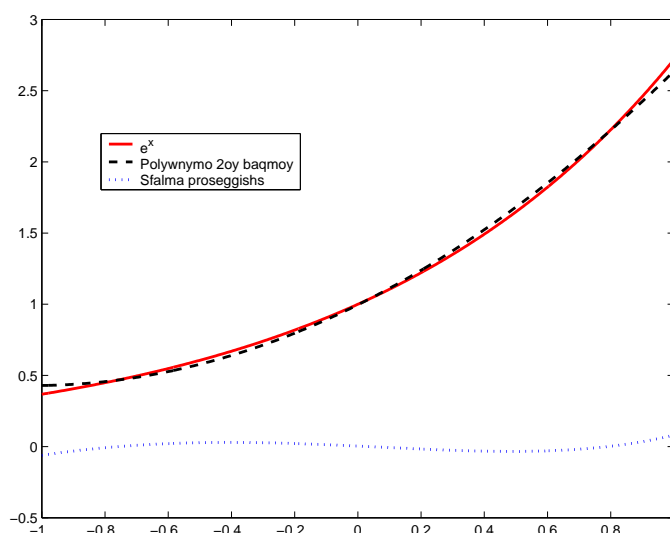
x	1	2	?	4	5	6	7
$f(x)$	1	0.5	0.3333	0.25	0.2	0.1667	0.1429

και ζητείται να βρείτε την τιμή x , η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή $f(x)$. Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα συνίσταται στην επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης $1/x=0.3333$. Σε πολλές περιπτώσεις όμως η συνάρτηση δεν είναι γνωστή. Έτσι, σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να εκτιμήσουμε το x από το πολυώνυμο παρεμβολής $p(x)$ της $f(x)$. Δηλαδή, πρέπει να λύσουμε το μη-γραμμικό πρόβλημα $p(x) = 0.3333$ για το δεδομένο πίνακα μετρήσεων. Εφόσον η $p(x)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση, κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2 του βιβλίου των Γ. Ακριβή και Β. Δουγαλή 'Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση'. Μια ακόμη απλή αλλά όχι ιδιαίτερα αξιόπιστη μέθοδος είναι να κάνουμε τη γραφική παράσταση του x ως προς το $f(x)$ και να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο σαν την Lagrange για να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του x , την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το x στο σημείο 0.3333. Δυστυχώς, με την αντιστροφή των μεταβλητών δεν είναι σίγουρο ότι οι τιμές κατά μήκος της νέας τετμημένης (η οποία τώρα είναι η $f(x)$) είναι ομοιόμορφα κατανομημένες, με αποτέλεσμα η παρεμβολή να παρουσιάζει ταλαντώσεις. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται το πρόβλημα της αντίστροφης παρεμβολής.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

Υπάρχουν τρεις διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων από τις οποίες προκύπτουν προβλήματα προσέγγισης. Η κάθε μία έχει τα δικά της ειδικά χαρακτηριστικά.

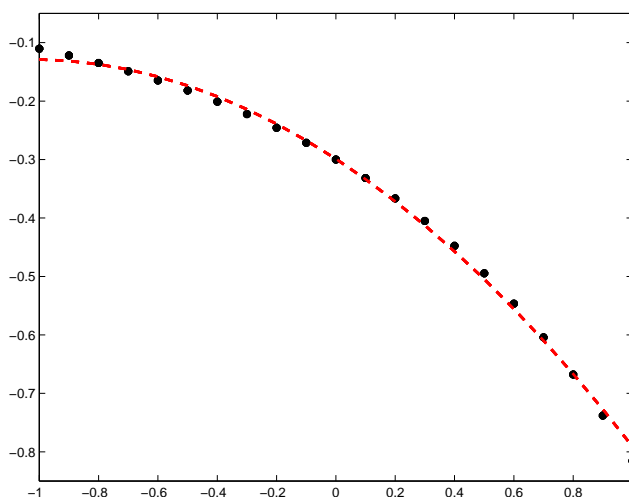
1. Προσέγγιση μαθηματικών συναρτήσεων.
2. Αναπαράσταση δεδομένων.
3. Ανάλυση δεδομένων.



Σχήμα 4. Προσέγγιση συνάρτησης.

Προσέγγιση μαθηματικών συναρτήσεων. Σ'αυτή την κατηγορία των προβλημάτων, πρέπει να προσεγγίσουμε μια *πολύπλοκη* συνάρτηση, με ένα πολυώνυμο. Τυπικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι $\sin(x)$, $\exp(x)$ κλπ. μια που αυτόματα ο υπολογιστής τις αντικαθιστά με πολυώνυμα κάθε φορά που χρειάζεται να υπολογίσει μια τιμή τους. Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

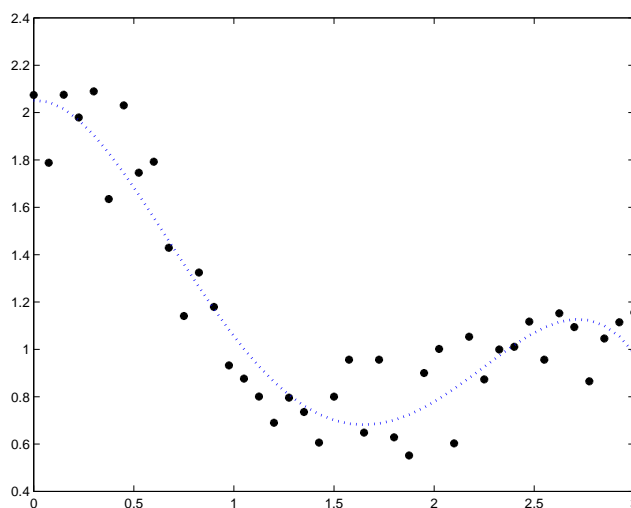
- Απαιτούμε πολύ υψηλή ακρίβεια, της τάξης των 6 έως και 30 δεκαδικών ψηφίων.
- Δεν πρέπει να υπάρχει αβεβαιότητα στη συνάρτηση που πρόκειται να προσεγγίσουμε.
- Χρησιμοποιούμε όλες τις ιδιότητες της συνάρτησης τις οποίες γνωρίζουμε και οι οποίες μειώνουν την πολυπλοκότητα της προσέγγισης(π.χ. περιοδικότητα κλπ).



Σχήμα 5. Προσέγγιση δεδομένων με μεγάλη ακρίβεια.

Αναπαράσταση δεδομένων. Σ' αυτή την κατηγορία έχουμε ένα μεγάλο σύνολο από δεδομένα (μετρήσεις οργάνων) και χρειαζόμαστε μια απλή και πιο εύχρηστη προσέγγιση. Τυπικό παράδειγμα είναι να έχουμε πολλές μετρήσεις της ατμοσφαιρικής πίεσης σε διάφορα ύψη και θέλουμε να αντικαταστήσουμε τον πίνακα των μετρήσεων με ένα μαθηματικό τύπο. Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Απαιτούμε μεσαίας τάξης ακρίβεια, 2 με 5 δεκαδικά ψηφία.
- Υπάρχει μικρή αβεβαιότητα στη δεδομένα μας.
- Υπάρχει συχνά (όχι πάντα) κάποια ειδική πληροφορία για τα δεδομένα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε τα δεδομένα καλύτερα. (π.χ. τα δεδομένα συνδέονται με μια εκθετική συνάρτηση)
- Τα δεδομένα είναι διακριτά σημεία και δεν είναι εύκολο να πάρουμε επιπλέον μετρήσεις.



Σχήμα 6. Προσέγγιση δεδομένων με μεγάλο σφάλμα.

Ανάλυση δεδομένων. Σ' αυτή την κατηγορία έχουμε ένα σύνολο δεδομένων που εμπεριέχουν αρκετή αβεβαιότητα, είτε λόγω σφαλμάτων των οργάνων μέτρησης, είτε λόγω των τεχνικών που χρησιμοποιήσαμε για να αποκτήσουμε αυτά τα δεδομένα. Η αβεβαιότητα μπορεί να κειμένεται από 50% έως και 100% και γενικά η αξιοπιστία του δείγματος μπορεί να πολύ χαμηλή. Αυτές οι προσεγγίσεις έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

- Απαιτούμε πολύ χαμηλή ακρίβεια, από 0.5 έως 3 δεκαδικά ψηφία.
- Υπάρχει αρκετή αβεβαιότητα στα δεδομένα, η οποία είναι με τυχαίο τρόπο κατανομημένη στο δείγμα, και ο τρόπος αυτός δεν είναι γνωστός σε μας.
- Δεν έχουμε επιπλέον πληροφορία συσχέτισης των δεδομένων.
- Τα δεδομένα είναι διακριτά σημεία και δεν είναι εύκολο να πάρουμε επιπλέον μετρήσεις.

Εσωτερικά γινόμενα και νόρμες σε χώρους συναρτήσεων.

Ορισμός: Έστω X ένας γραμμικός χώρος. Μια απεικόνιση $(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbf{R}$ λέγεται εσωτερικό γινόμενο στον X , αν είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή της, συμμετρική και θετικά ορισμένη. Δηλαδή:

$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad \forall x, y, z \in X$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y), \quad \forall x, y \in X$$

$$(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in X$$

$$(x, x) > 0, \quad \forall x \in X \setminus \{0\}.$$

Ένας χώρος στον οποίο έχει ορισθεί ένα εσωτερικό γινόμενο λέγεται **Ευκλείδειος χώρος**. Αν για $x, y \in X$ ισχύει $(x, y) = 0$ τότε αυτά λέγονται **ορθογώνια**.

Ένα απλό εσωτερικό γινόμενο που σας είναι ήδη γνωστό, είναι το $(\cdot, \cdot) : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ όπου αν $(a, b), (c, d) \in \mathbf{R}^2$ τότε $((a, b), (c, d)) = ac + bd$. Επίσης γνωρίζουμε ότι αν δυο διανύσματα του επιπέδου είναι κάθετα μεταξύ τους τότε το εσωτερικό γινόμενο τους είναι 0, ενώ ισχύει $\cos(\omega) = \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}$, όπου ω η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

Στον $C([a, b])$, (το χώρο των συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το $[a, b]$) ένα εσωτερικό γινόμενο είναι το

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad \text{ή} \quad (f, g) = \int_a^b w(x)f(x)g(x)dx$$

όπου w μια θετική, ολοκληρώσιμη συνάρτηση βάρους.

Σε πολύπλοκους χώρους χρειάζεται να εισάγουμε την έννοια της απόστασης μεταξύ δυο στοιχείων του, όπως στο σύνολο των πραγματικών αριθμών έχουμε την απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο αριθμών. Για το λόγο αυτό εισάγουμε τις νόρμες ή μέτρα στους χώρους αυτούς. Στον \mathbf{R} η νόρμα είναι η απόλυτη τιμή. Στον \mathbf{R}^2 η έννοια της νόρμας δίδεται και από την τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των συντεταγμένων ενός διανύσματος. Δηλαδή, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ τότε

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Αυτό επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbf{R}^n, n \in \mathbf{N}$, σαν $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}, x \in \mathbf{R}^n$. Μια άλλη νόρμα στον ίδιο χώρο είναι $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|, x \in \mathbf{R}^n$. Υπάρχουν πολλοί τρόποι να ορίσει κάποιος μία νόρμα, σε ένα πιο πολύπλοκο χώρο, και ένας τρόπος είναι μέσω του εσωτερικού γινομένου.

Ορισμός. Έστω $(X, (\cdot, \cdot))$ ένας χώρος με εσωτερικό γινόμενο, τότε με

$$\|x\| := \sqrt{(x, x)}$$

ορίζεται μία νόρμα στον X .

Παραδείγματα νορμών στον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $(C([a, b]))$ είναι

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} \quad \text{ή} \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b w(x)f^2(x)dx}$$

οι οποίες προήλθαν από τα παραπάνω εσωτερικά γινόμενα. Άλλες νόρμες είναι

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{ή} \quad \|f\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Ορισμός. Σε ένα χώρο με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$, αν Y είναι ένα υποσύνολο του, και $x \in X$ τότε το $y \in Y$ λέγεται *βέλτιστη προσέγγιση* αν ισχύει

$$\text{εαν } z \in Y \text{ τότε } \|x - y\| \leq \|x - z\|.$$

Η βέλτιστη προσέγγιση έχει την έννοια της προβολής του στοιχείου που θέλουμε να προσεγγίσουμε, σε ένα χώρο μικρότερης διάστασης και πολυπλοκότητας. Αρκετά βοηθητικό είναι το σχήμα 5.1 στη σελίδα 177 του βιβλίου σας "Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση".

Συναρτήσεις και Πολυώνυμα.

Γνωρίζουμε ότι ο χώρος των ομαλών συναρτήσεων, είναι άπειρος και δεν υπάρχει μοναδική πεπερασμένη βάση η οποία να περιγράφει όλα τα στοιχεία του.

Η κύρια ιδιότητα που χαρακτηρίζει ένα σύνολο στοιχείων x_1, x_2, \dots, x_n σαν βάση του χώρου Y είναι, φυσικά $x_i \in Y, \forall i = 1, \dots, n$ και,

$$\text{εαν } y \in Y \text{ τότε } y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \text{ όπου } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}.$$

Μια πολύ χρήσιμη ιδιότητα που συσχετίζει μια βάση ενός χώρου και τις βέλτιστες προσεγγίσεις μέσα στο χώρο αυτό είναι: Αν $y \in Y$ η βέλτιστη προσέγγιση του z στον Y με βάση το x_1, x_2, \dots, x_n , τότε

$$(z, x_i) = (y, x_i), \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Συνήθως έχουμε να αντιμετωπίσουμε το παρακάτω πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. Έστω $f|_{[a,b]}$ μια ομαλή συνάρτηση. Ψάχνουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού $n, p_n^*(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση $\int_a^b w(x)(f(x) - p_n^*(x))^2 dx = \min_{p \in P_n} \int_a^b w(x)(f(x) - p(x))^2 dx$. Αυτό το πολυώνυμο, p_n^* , ονομάζεται **προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων** της f . ♣

Με βάση όσα είπαμε παραπάνω για βάσεις, νόρμες, και εσωτερικό γινόμενο καθώς επίσης και με τις ιδιότητες του, το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με την επίλυση των εξισώσεων $\sum_{i=0}^n a_i \int_a^b w(x) x^{i+j} dx = \int_a^b w(x) f(x) x^j dx$, για $j = 0 : n$, αφού τα $1, x, x^2, x^3, \dots, x^n$ αποτελούν βάση $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$, ο οποίος είναι ο χώρος των πολυωνύμων n βαθμού με πεδίο ορισμού το \mathbf{R} . Οι εξισώσεις αυτές αναφέρονται ως **κανονικές εξισώσεις**.

Γενικά, εάν η συνάρτηση προσέγγισης είναι $\phi(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_i(x)$, όπου $\{B_i\}_{i=1}^n$ βάση του χώρου προσέγγισης, τότε οι κανονικές εξισώσεις είναι $\sum_{i=0}^n a_i \int_a^b w(x) B_i(x) B_j(x) dx = \int_a^b w(x) f(x) B_j(x) dx$.

Μία σημαντική κατηγορία βάσεων είναι οι ορθογώνιες βάσεις τα στοιχεία των οποίων είναι ορθογώνια, δηλαδή αν x_1, x_2, \dots, x_n ορθογώνια βάση τότε $(x_i, x_j) = 0, \forall i \neq j$.

Έτσι στην περίπτωση που έχουμε στη διάθεση μας ορθογώνιες βάσεις τότε η λύση του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι: $a_i = \frac{\int_a^b w(x) f(x) B_i(x) dx}{\int_a^b w(x) B_i(x) B_i(x) dx}$ για $i = 0 : n$. **Βεβαιωθείτε ότι καταλαβαίνετε γιατί συμβαίνει αυτό.** Εάν η f είναι γνωστή μόνο σε ένα σύνολο σημείων, τότε το ολοκλήρωμα αντικαθίσταται από το άθροισμα των ποσοτήτων που εμπλέκονται, στα γνωστά σημεία της συνάρτησης.

Περιοριζόμαστε στο χώρο των πολυωνύμων μια που με αυτόν θα ασχοληθούμε στις παρακάτω ασκήσεις.

Ορισμός: Πολυώνυμα Legendre $P_n, n = 0, 1, \dots$, λέγονται τα ορθογώνια πολυώνυμα ως προς το εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) , όπου

$$(f, g) := \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx$$

για τα οποία ισχύει $P_n(1) = 1, n = 0, 1, \dots$

Πρόταση: Για τα πολυώνυμα Legendre, ισχύει η παρακάτω αναδρομική σχέση,

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), n \geq 1,$$

όπου $P_0(x) = 1, P_1(x) = x$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. Αποδείξτε με μαθηματικό τρόπο, ότι τα πολυώνυμα T_0, T_1 και T_2 , όπου $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, είναι ορθογώνια ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο. Χρησιμοποιήστε τα σαν βάση στο χώρο $\mathbf{P}_2([-1, 1])$ για να υπολογίσετε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της $\exp(x)$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, του πολυωνύμου και του σφάλματος. Ποιά η σχέση των T_i με τα πολυώνυμα Legendre;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. Έστω το πολυώνυμο $p_2(x) = \sum_{i=0}^2 a_i T_i(x)$, όπου $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$ και $T_n(x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x)$. Αποδείξτε με μαθηματικό τρόπο ότι τα πολυώνυμα T_i είναι ορθογώνια σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ και βρείτε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της e^x . Τα πολυώνυμα T_i ονομάζονται *Chebyshev*. Υπολογίστε με μαθηματικό τρόπο τις ρίζες τους. Έχετε συναντήσει τα σημεία αυτά πριν; Σημειώστε ότι:

$$\int_{-1}^1 w(x) T_i(x) T_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ \pi, & \text{αν } i = j = 0 \\ \pi/2, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Διακριτά ελάχιστα τετράγωνα.

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε στην προσέγγιση συναρτήσεων. Τώρα θα ασχοληθούμε με την προσέγγιση δεδομένων, που προέρχονται από μετρήσεις και μπορεί να περιέχουν μικρό ή μεγάλο σφάλμα το οποίο όμως δεν μπορούμε να προσεγγίσουμε.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. Η απλούστερη περίπτωση προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων είναι η προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής σε ένα σύνολο ζευγών παρατηρήσεων x - y . Η τακτική αυτή λέγεται "**Γραμμική Παλινδρόμηση**". Η μαθηματική περιγραφή της ευθείας γραμμής είναι $y = a_0 + a_1 x + e$, όπου a_0 και a_1 είναι συντελεστές που περιγράφουν το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων και την κλίση αντίστοιχα, ενώ e είναι το σφάλμα ή το υπόλοιπο μεταξύ του μοντέλου και των παρατηρήσεων.

Αν έχουμε n μετρήσεις, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ τότε μία νόρμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η επέκταση της Ευκλείδειας στον \mathbf{R}^n για την οποία ισχύει:

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Η παραπάνω ευθεία, $y = \alpha_1 x + \alpha_0$, αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση εαν τα α_0 και α_1 είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται η

$$\|\mathbf{y} - (\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_0)\|_2.$$

Βεβαιωθείτε ότι σας είναι κατανοητό γιατί μας αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε ως προς α_0 και α_1 την συνάρτηση $\phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i)^2$.

Λύση. Η λύση ισοδυναμεί με την επίλυση των παρακάτω εξισώσεων, οι οποίες αποτελούν επαρκείς συνθήκες για την ελαχιστοποίηση:

$\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) = 0$ και $\frac{\partial \phi}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1 x_i) x_i = 0$. Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι $a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$ και $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$, όπου \bar{y} και \bar{x} είναι οι μέσες τιμές των y και x αντίστοιχα. Βεβαιωθείτε ότι ξέρετε πως και γιατί καταλήγουμε σε αυτούς τους τύπους.

Παράδειγμα. Για 7 προγράμματα υπολογιστή μετρήθηκαν ο αριθμός των προσβάσεων στο δίσκο (x) και ο χρόνος χρήσης του επεξεργαστή (y). Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, μαζί με τα γινόμενα $x \cdot y$, $x \cdot x$ και $y \cdot y$.

x	y	$x \cdot y$	$x \cdot x$	$y \cdot y$
14	2	28	196	4
16	5	80	256	25
27	7	189	729	49
42	9	378	1764	81
39	10	390	1521	100
50	13	650	2500	169
83	20	1660	6889	400
$\sum x$	$\sum y$	$\sum x \cdot y$	$\sum x \cdot x$	$\sum y \cdot y$
271	66	3375	13855	828

i	x	y	Εκτίμηση του y (\tilde{y})	Σφάλμα ή υπολοίπο $e_i = (y - \tilde{y})$	Τετράγωνο σφάλματος ή υπολοίπου
1	14	2	3.4049	-1.4049	1.973744
2	16	5	3.8925	1.1075	1.226556
3	27	7	6.5743	0.4257	0.18122
4	42	9	10.2313	-1.2313	1.5161
5	39	10	9.4999	0.5001	0.2501
6	50	13	12.1817	0.8183	0.669615
7	83	20	20.2271	-0.2271	0.051574
Σύνολο	271	66	66.0117	SE=-0.0117	SSE=5.86891

Ιδιότητες της γραμμικής παλινδρόμησης.

- Η ευθεία ελαχίστων τετραγώνων διέρχεται από το σημείο (\bar{x}, \bar{y}) . Αυτό αποδεικνύεται από τον τύπο που μας δίνει το a_0 .
- $\sum y = \sum \tilde{y}$, γιατί $\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = 0$.
- Το άθροισμα των υπολοίπων, SE, πρέπει να είναι μηδέν (για τον ίδιο λόγο με πριν), εκτός και αν υπάρχουν σφάλματα στρογγυλοποίησης.
- Το άθροισμα των τετραγώνων των υπολοίπων, SSE, πρέπει να είναι ελάχιστη.

Δείκτες	Τιμές από το παράδειγμα	Φυσική Σημασία
$SSE = \sum (y - \hat{y})^2$	5.86891	Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων
$MSE = SSE/n$	1.173782	Μέσος τετραγώνων σφάλματος
$SST = \sum (y - \bar{y})^2$	205.7143	Συνολικό άθροισμα τετραγώνων. Μετράει τις διαφορές του y από τον μέσο όρο
n (αριθμός μετρήσεων)	7	
$SSR (= SST - SSE)$	199.8454	
Συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = SSR/SST$	0.971471	Μετρά την ποιότητα της παλινδρόμησης
Μέση τιμή του x	38.71429	
Μέση τιμή του y	9.428571	
Εκτιμώμενη μέση τιμή του y	9.430243	
Τυπική απόκλιση	1.083412	

Πίνακας 2: Δείκτες αξιολόγησης της ποιότητας της προσαρμογής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Έστω ότι ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ταχύτητα του δικτύου στο χρονικό διάστημα $[0, 3]$ σε 41 ισαπέχοντα σημεία. Υπολογίστε τα πολυώνυμα βαθμού 0 και 1 που προσεγγίζουν τα δεδομένα με τον καλύτερο τρόπο. Υπολογίστε όλους τους δείκτες για τα πολυώνυμα που θα βρείτε, όπως στο παράδειγμα 1. Χρησιμοποιήστε το Excel σε όλους σας τους υπολογισμούς. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

Σημεία	Δεδομένα					
1	2.07458	1.78801	2.07548	1.97954	2.08945	1.63480
7	2.03053	1.74630	1.79267	1.42920	1.14101	1.32438
13	1.17944	0.93214	0.87631	0.80062	0.69002	0.79622
19	0.73527	0.60637	0.80011	0.95631	0.64858	0.95624
25	0.62853	0.55175	0.90018	1.00167	0.60299	1.05339
31	0.87300	0.99931	1.01089	1.11733	0.95633	1.15222
37	1.09389	0.86498	1.04563	1.11432	1.15554	

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους (Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gn ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες. ♣



Σχήμα 7. Βρείτε την πιο κατάλληλη μέθοδο για να αναπαραστήσετε τη γραμμή του προφίλ του κοριτσιού

Οδηγίες παράδοσης: Λύστε τις 7 Ασκήσεις που περιγράφονται μέσα στο φυλλάδιο-σημειώσεις. Παραδώστε τον Matlab κώδικα, το αρχείο Excel και το κείμενο με τα σχόλια σας μέσω του eClass. Τα *Προβλήματα* είναι προαιρετικά.

Καλή επιτυχία.