

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΗΥ200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

Τζιρίτας Νικόλαος μεταπτυχιακος φοιτητής ΑΜ 48

Άσκηση 1 : Απάντηση

$$p_2(x) = 1 - 50x^2/2$$

$$p_4(x) = 1 - 50x^2/2 + 15000x^4/24$$

$$p_6(x) = 1 - 50x^2/2 + 15000x^4/24 + 11250000x^6/720$$

Αυτό που παρατηρούμε είναι ότι όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο αυξάνεται και το άνω φράγμα του σφάλματος.

n	f(.3)	p(.3)	εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25	96.72523090
4	0.30769231	3.8125	2592.07544886
6	0.30769231	8205.0625	58431.83431360



Άσκηση 2 : Απάντηση

1 Από όσο παρατηρούμε όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολυωνύμου χειροτερεύει το σφάλμα (εκτός για τον 61^ο βαθμό). Το πρόβλημα δημιουργείται επειδή τα σημεία είναι ισαπέχοντα και στα άκρα που ταλαντεύεται το πολυώνυμο δεν έχουμε αρκετά σημεία έτσι ώστε να το περιγράψουν καλύτερα. Ο λόγος εξηγείται και στην παρακάτω άσκηση.

Πολ	Σφάλμα
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594692
61	6.87406255



Άσκηση 3 : Απάντηση

1 Από όσο παρατηρούμε εν αντιθέσει με την προηγούμενη άσκηση, καθώς αυξάνεται ο βαθμός του πολωνύμου, μειώνεται το σφάλμα. Αυτό δικαιολογείται, αφού δεν έχουμε πάρει ισαπέχοντα σημεία, έτσι ώστε στα άκρα του πολωνύμου όπου και ταλαντεύεται περισσότερο, να παίρνουμε περισσότερα σημεία. Επομένως όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολωνύμου τόσο αυξάνεται και ο αριθμός των σημείων στα άκρα του, με αποτέλεσμα να καλυτερεύει το σφάλμα. Αυτό φαίνεται και στην γραφική παράσταση.

Πολ	Σφάλμα
3	0.84088988
7	0.47468888
13	0.12950669
31	0.00037703
61	0.00000694



Άσκηση 4 : Απάντηση

1 Από όσο παρατηρούμε από τον παρακάτω πίνακα, όσο αυξάνονται τα ισαπέχοντα σημεία, τόσο καλυτερεύει το σφάλμα. Από όσα έχουμε πει, δεν είναι απαραίτητο όταν παίρνουμε περισσότερα σημεία στην παρεμβολή να καλυτερεύει και το σφάλμα. Όμως στην περίπτωσή μας, το σφάλμα καλυτερεύει όσο αυξάνονται τα σημεία, αυτό δικαιολογείται επειδή το πολωνύμιο μας δεν ταλαντεύεται πολύ, επομένως όσο περισσότερα σημεία παίρνουμε, τόσο καλύτερα περιγράφεται.

Διάστημα	Σημεία	Σφάλμα
$[-3, 3]$	7	0.1458
$[-3, 3]$	13	0.0441
$[-3, 3]$	31	0.0108
$[-3, 3]$	61	0.0029
$[-5, 5]$	13	0.0463

Άσκηση 5 : Απάντηση

1 πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε ως προς α_0 , α_1 και α_2 την συνάρτηση $\phi(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2)^2$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2) = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2) x_i = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial a_2} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \alpha_0 - \alpha_1 x_i - \alpha_2 x_i^2) x_i^2 = 0$$

Λύνοντας τις παρακάτω εξισώσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_0 \sum_{i=1}^n (1) + a_1 \sum_{i=1}^n (x_i) + a_2 \sum_{i=1}^n (x_i^2) &= \sum_{i=1}^n (y_i) \\
a_0 \sum_{i=1}^n (x_i) + a_1 \sum_{i=1}^n (x_i^2) + a_2 \sum_{i=1}^n (x_i^3) &= \sum_{i=1}^n (y_i x_i) \\
a_0 \sum_{i=1}^n (x_i^2) + a_1 \sum_{i=1}^n (x_i^3) + a_2 \sum_{i=1}^n (x_i^4) &= \sum_{i=1}^n (y_i x_i^2)
\end{aligned}$$

προκύπτει το παρακάτω σύστημα

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (1) & \sum_{i=1}^n (x_i) & \sum_{i=1}^n (x_i^2) \\ \sum_{i=1}^n (x_i) & \sum_{i=1}^n (x_i^2) & \sum_{i=1}^n (x_i^3) \\ \sum_{i=1}^n (x_i^2) & \sum_{i=1}^n (x_i^3) & \sum_{i=1}^n (x_i^4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n (y_i) \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i) \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i^2) \end{bmatrix}$$

Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με την gauss elimination βρίσκουμε τους συντελεστές του πολωνύμου.

$$a_0 = 2.2510, a_1 = -1.5845 \text{ και } a_2 = 0.4205$$

Δείκτες	Πολυνώνιο 2 βαθμού	Φυσική Σημασία
$SSE = \sum (y - \hat{y})^2$	1.391109	Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων
$MSE = SSE/n$	0.033929	Μέσος τετραγώνων σφάλματος
$SST = \sum (y - \bar{y})^2/n$	8.351682	Συνολικό άθροισμα τετραγώνων. Μετράει τις διαφορές του y από τον μέσο όρο
n (αριθμός μετρήσεων)	41	
$SSR (= SST - SSE)$	6.960573	
Συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = SSR/SST$	0.833434	Μετρά την ποιότητα της παλινδρόμησης
Μέση τιμή του x	1.5	
Μέση τιμή του y	1.151354	
Εκτιμώμενη μέση τιμή του y	1.151354	

Άσκηση 6 : Απάντηση

Δείκτες	p_4	p_8
$SSE = \sum (y - \hat{y})^2$	0.912383	0.665506
$MSE = SSE/n$	0.022253	0.016232
$SST = \sum (y - \bar{y})^2$	8.351682	8.351682
n (αριθμός μετρήσεων)	41	41
SSR (=SST-SSE)	7.439299	7.686176
Συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = SSR/SST$	0.890755	0.920315
Μέση τιμή του x	1.5	1.5
Μέση τιμή του y	1.151354	1.151354
Εκτιμώμενη μέση τιμή του y	1.151354	1.151354