

ΑΓΓΕΛΟΠΟΥΛΟΣ ΧΡΗΣΤΟΣ

login : hragelop

ΑΕΜ : 343

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΗΥ200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor
και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

ΜΕΘΟΔΟΣ TAYLOR ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα.

```
disp('ASKHSH 1');  
clf;  
clear all;  
xx = linspace(-1,1,201);  
xx2 = xx.*xx;  
  
y2 = 1 - 50*xx2/2;  
y4 = y2 + 15000*(xx2.*xx2)/24;  
y6 = y4 - 11250000*(xx2.*xx2.*xx2)/720;  
  
yfun = 1./(1+25*xx.*xx);  
plot(xx, yfun, 'k-', 'linewidth',2); hold on;  
plot(xx, y2, 'k-', 'linewidth',2);  
plot(xx, y4, 'k--', 'linewidth',2);  
plot(xx, y6, 'k:', 'linewidth',2);  
legend('1/(1+25*x.^2)', 'T_2', 'T_4', 'T_6')  
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-1 1 -5 5])  
title('Η synarthsh 1/(1+25*x.^2) kai ta polywnyma 2ou, 4ou kai 6ou va8moy')
```

```

fprintf('Timh sto 0.3 : %12.8f \n', 1/(1+25*0.3*0.3)); fprintf('
Timh polywnymoy (T_2) sto 0.3: %12.8f \n',
    1 - 50*(0.3^2)/2);
fprintf('Timh polywnymoy (T_4) sto 0.3: %12.8f \n',
    1 - 50*(0.3^2)/2 + 15000*(0.3^4)/24);
fprintf('Timh polywnymoy (T_6) sto 0.3 : %12.8f \n',
    1 - 50*(0.3^2)/2 + 15000*(0.3^4)/24 - 11250000*(0.3^6)/720);

maxerror2 = max(abs((15000*xx.*(-1+25*xx2)./((1+25*xx2).^4))/6));
maxerror4 = max(abs((3750000*xx.*(3+1875*xx2.*xx2-250*xx2)./
    ((1+25*xx2).^6))/120));
maxerror6 = max(abs((15750000000*xx.*
    (-1+175*xx2-4375*xx2.^2+15625*xx2.^3)./((1+25*xx2).^8))/5040));

fprintf('To sfalma gia to polywnymo 2ou ba8moy einai
    %12.8f \n', maxerror2);
fprintf('To sfalma gia to polywnymo 4ou ba8moy einai
    %12.8f \n', maxerror4);
fprintf('To sfalma gia to polywnymo 6ou ba8moy einai
    %12.8f \n', maxerror6);
hold off;

```

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0,30769231	-1,25	96,72523090
4	0,30769231	3,8125	2592,07544886
6	0,30769231	-7,578125	66779,23921554

Όσο πιο κοντά στο 0 βρισκόμαστε, η καλύτερη παρεμβολή που επιτυγχάνεται από το πολυώνυμο βαθμού 6. Έπεται το πολυώνυμο 4ου και 2ου βαθμού. Αλλά όσο απομακρύνεται κανείς απ' το 0, το μικρότερο σφάλμα για το πολυώνυμο βαθμού 2 και το σφάλμα μεγαλώνει μαζί με τον βαθμό του πολυωνύμου.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της

διαφοράς του πολυωνύμου απο τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα.

```
disp('ASKHSH 2'); clf; clear all;

xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);

shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = shmeia(i);
    a = matrixgenerator(x, n);
    [l, u] = lu(a);
    y = exp(-4*x.*2);
    yi = u\ (l\y');
    for k = 1:601
        yy(i, k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me polywnymo parembolhs se %2d shmeia
            einai %12.8f \n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), xplot, yy(2,:), xplot, yy(3,:), xplot, yy(4,:),
      xplot, yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'b-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x*2) kai ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off
```

Σημεία	Σφάλμα
3	0,87267038
7	0,96786931
13	6,58057959
31	86,64594692
61	6,87406255

Μεγαλώνει μέχρι 31 ισαπέχοντα σημεία όπου έχουμε πάρα πολύ μεγάλο σφάλμα. Μετά, το σφάλμα ξανά-μικραίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας.

```
disp('ASKHSH 3'); clf; clear all;
xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    clear x;
    n = shmeia(i);
    for a = 0:(n-1)
        x(a+1) = 3*cos(((2*a)+1)/(n+1))*(pi/2));
    end
    a = matrixgenerator(x,n);
    [l, u] = lu(a);
    y = exp(-4*x.*2);
    yi = u\(l\y');
    for k = 1:601
        yy(i,k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me polywnymo parembolhs se %2d shmeia einai
        \n\n%12.8f \n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), xplot, yy(2,:), xplot, yy(3,:), xplot, yy(4,:),
    xplot, yy(5,:)); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'b-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x*2) kai ta polywnyma parembolhs');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -5 5]); hold off
```

Σημεία	Σφάλμα
3	0,99380400
7	0,68068888
13	0,20063964
31	0,00048050
61	0,00002323

Βλέπουμε ότι το σφάλμα μικραίνει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων στον οποίο σπάσαμε το διάστημα. Παρατηρούμε έτσι ότι ο τρόπος με τον οποίο διαλέγουμε τα σημεία του διαστήματος παίζει μεγάλο ρόλο στα αποτελέσματα του σφάλματος.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ'ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ'ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$.

```

disp('ASKHSH 4'); clf; clear all;

xplot = linspace(-3, 3, 601);
expplot = exp(-4*xplot.*xplot);

shmeia = [3 7 13 31 61];
for i = 1:5
    clear x;
    clear y;
    clear yi;
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = length(x);
    for k=1:n
        y(k) = exp(-4*x(k).^2);
    end

    xi=-3:0.1:3;
    yi=interp1(x, y, xi, 'spline');
```

```

    for k = 1:601
        yy(i,k) = evaluatepolynomial(yi, n, xplot(k));
    end
    error = max(abs(expplot-yy(i,:)));
    fprintf('To sfalma me kubikes splines se %2d shmeia einai
            \%12.8f \n', shmeia(i), error);
end
plot(xplot, yy(1,:), 'b-', xplot, yy(2,:), 'g:', xplot, yy(3,:), 'r-. ',
      xplot, yy(4,:), 'c--', xplot, yy(5,:), 'm-'); hold on;
legend('3 shmeia', '7 shmeia', '13 shmeia', '31 shmeia', '61 shmeia');
plot(xplot, expplot, 'k-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x·2) kai ta kubika splines');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -2 8]); hold off

disp('press ANY key'); pause; clf;

xplot2 = linspace(-5, 5, 1001);
expplot2 = exp(-4*xplot2.*xplot2);

clear x;
clear y;
clear yi;
x = linspace(-5, 5, shmeia(3));
n = length(x);
for k=1:n
    y(k) = exp(-4*x(k).^2);
end

xi2=-5:0.1:5;
yi2=interp1(x, y, xi2, 'spline');

for k = 1:1001
    yy2(k) = evaluatepolynomial(yi2, n, xplot2(k));
end

```

```

error = max(abs(expplot2-yy2));
fprintf('To sfalma me kubikes splines se \%2d shmeia einai
        \%12.8f \n', shmeia(3), error);

plot(xplot2, yy2, 'b-. '); hold on;
legend('13 shmeia');
plot(xplot2, expplot2, 'k-', 'linewidth', 2);
title('H synarthsh exp(-4x·2) kai kubiko spline se 13 shmeia');
xlabel('x'); ylabel('y'); axis([-3 3 -1 9]); hold off

```

Διάστημα $[-3, 3]$	
Σημεία	Σφάλμα (με 601 ισαπέχοντα σημεία)
3	1,35666667
7	153,95610447
13	1080,5327780
31	298319867521585,5
61	3445502887858862600
Διάστημα $[-5, 5]$	
Σημεία	Σφάλμα (με 1001 ισαπέχοντα σημεία)
13	639278,56668671

Το σφάλμα και ο αριθμός των σημείων μεγαλώνουν ανάλογα. Από τη γραφική παρατηρείται το εξής: κοντά στα 1 και -1, τα splines προσεγγίζουν αρκετά την αρχική συνάρτηση. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων, τα splines παραμένουν πιο κοντά από την αρχική συνάρτηση (όταν πάμε προς το -2) όμως έχουν "κακό" σφάλμα όταν ξεπερνάνε το -2.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

```
disp('ASKHSH 5'); clf; clear all;
x = linspace(0,3,41); n = length(x);

y = [ 2.07458  1.78801  2.07548  1.97954  2.08945  1.63480 ...
      2.03053  1.74630  1.79267  1.42920  1.14101  1.32438 ...
      1.17944  0.93214  0.87631  0.80062  0.69002  0.79622...
      0.73527  0.60637  0.80011  0.95631  0.64858  0.95624 ...
      0.62853  0.55175  0.90018  1.00167  0.60299  1.05339 ...
      0.87300  0.99931  1.01089  1.11733  0.95633  1.15222 ...
      1.09389  0.86498  1.04563  1.11432  1.15554 ];

sx = sum(x); sx2 = x*x'; sx3 = sum(x.*x.*x); sx4 = sum(x.*x.*x.*x);
sy = sum(y); sxy = x*y'; sx2y = sum(x.*x.*y);

mat = [n sx sx2; sx sx2 sx3; sx2 sx3 sx4];
rhs = [sy; sxy; sx2y];

synt = mat\rhs;
ypol = synt(1) + synt(2)*x + synt(3)*x.*x;

sse = (y-ypol)*(y-ypol)';

plot(x,y,'*k'); hold on;
plot(x,ypol,':b');
legend('dedomena','polyonimo ba8mou 2');
xlabel('x'); ylabel('y');
hold off;
```

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων (SSE) = 1,3911.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική πράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

```
disp('ASKHSH 6'); clf; clear all;
x = linspace(0,3,41); n = length(x);

y = [ 2.07458  1.78801  2.07548  1.97954  2.08945  1.63480 ...
      2.03053  1.74630  1.79267  1.42920  1.14101  1.32438 ...
      1.17944  0.93214  0.87631  0.80062  0.69002  0.79622...
      0.73527  0.60637  0.80011  0.95631  0.64858  0.95624 ...
      0.62853  0.55175  0.90018  1.00167  0.60299  1.05339 ...
      0.87300  0.99931  1.01089  1.11733  0.95633  1.15222 ...
      1.09389  0.86498  1.04563  1.11432  1.15554 ];

synt4 = polyfit(x,y,4);
ypoly4 = polyval(synt4, x);
sse = (y-ypoly4)*(y-ypoly4)';

synt8 = polyfit(x,y,8);
ypoly8 = polyval(synt8, x);
sse = (y-ypoly8)*(y-ypoly8)';

plot(x,y,'*k'); hold on;
plot(x,ypoly4,'--b');
plot(x,ypoly8,'-.r');
legend('dedomena','polyonimo ba8mou 4','polyonimo ba8mou 8');
xlabel('x'); ylabel('y');
hold off;
```

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 4ου βαθμού (SSE) = 0,9124.

Άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων για το πολυώνυμο 8ου βαθμού (SSE) = 0,9124.

Όσο αυξάνει ο βαθμός του πολυωνύμου, μικραίνει και το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους(Παραμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gv ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες.

```
disp('ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ'); clf; clear all;
```

```
x0 = 72;
```

```
y0 = 197;
```

```
shmeia = [  
    191 322  
    187 326  
    186 330  
    185 334  
    186 338  
    187 342  
    190 346  
    194 350  
    198 354  
    201 358  
    202 362  
    199 366  
    196 370  
    197 374  
    201 377  
    203 378  
    204 379  
    207 378  
    213 374  
    219 370  
    224 368  
    226 370
```

222 374
218 378
215 382
212 386
210 390
209 394
208 396
207 398
206 396
205 394
203 396
201 398
201 402
203 406
209 410
213 414
216 418
216 419
221 419
223 418
220 422
217 426
216 422
216 420
214 422
211 426
212 430
213 434
219 438
223 442
229 446
233 450
237 454
240 458
242 462
244 466
244 470
243 474

```

243 478
242 482
242 486
244 490
245 494
248 498
250 502
254 506
257 510
];

%%8a baloume twra thn katw aristerh gwnia ths ikonas sto shmeio (0,0)
for i=1 : (size(shmeia,1)),
    x(i) = shmeia(i, 1) - x0;
end

for i=1 : (size(shmeia,1)),
    y(i) = shmeia(i, 2) - y0;
end

sum = 0;
for i=1 : (size(shmeia,1)-1),
    t(i) = sum;
    sum = sum + sqrt( (x(i+1) - x(i))^2 + (y(i+1)-y(i))^2 );
end
t(i+1) = sum;

tt = 0 : 0.05 : sum;

xx = spline(t, x, tt);
yy = spline(t, y, tt);

axis([0 350 0 350]);
hold on;
plot(xx, yy);
title('Grafikh parastash tou profil tou koritsiou');
hold off;

```

Έχουμε διαλέξει την παρεμβολή με splines και παίρνουμε αρκετές συντεταγμένες των σημείων του προφίλ για μεγαλύτερη ακρίβεια.