

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**  
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

ΦΛΩΡΟΥ ΧΡΥΣΟΥΛΑ

AEM:385

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:** Υπολογίστε το βαθμό  $n$  του πολυωνύμου  $p$  (σύμφωνα με τη μέθοδο Taylor ως προς το σημείο 0) το οποίο προσεγγίζει τη συνάρτηση  $\cos(x)$  με σφάλμα μικρότερο ή ίσο  $\frac{1}{2}10^{-5}$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ . Σχεδιάστε το πολυώνυμο και την  $\cos(x)$  στην ίδια γραφική παράσταση για το διάστημα  $[-3\pi/2, 3\pi/2]$ . ♣

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο του Taylor:  $f(x) = f(0) + f'(0)*x/1 + f''(0)*x^2/2! + f'''(0)*x^3/3! + \dots + f^n(0)*x^n/n!$  παίρνουμε το πολυώνυμο που προσεγγίζει την  $g(x)=\cos(x)$  το οποίο είναι βαθμού 14. Αφού πρέπει  $R_n(x) = f^{n+1}(z)*x/(n+1)!$  να είναι μικρότερο ή ίσο του  $\frac{1}{2}10^{-5}$ . Όπου  $z$  ένας αριθμός μεταξύ του  $x$  και του μηδενός. Άρα το πολυώνυμο που προσεγγίζει την  $g(x)=\cos(x)$  είναι:  $y=1 - (x^2/2) + (x^4/4!) - (x^6/6!) + (x^8/8!) - (x^{10}/10!) + (x^{12}/12!) - (x^{14}/14!)$

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης  $\frac{1}{1+25x^2}$ , καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα  $[-1, 1]$ . Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση;

ΛΥΣΗ

Ο ζητούμενος πίνακας παρουσιάζεται παρακάτω:

| n | f(.3)      | p(.3)       | Εκτίμηση σφάλματος |
|---|------------|-------------|--------------------|
| 2 | 0.30769231 | -1.25000000 | 96.72523090        |
| 4 | 0.30769231 | 3.81250000  | 2592.07544886      |
| 6 | 0.30769231 | -7.578125   | 58431.83431360     |

♣

Απο τον τύπο του Taylor:  $f(x)=f(0) + f'(0) * x/1 + f''(0) * x^2/2! + f'''(0) * x^3/3! + \dots + f^n(0) * x^n/n!$  παίρνουμε τα πολυώνυμα βαθμού 2,4,6. Παρατηρούμε ότι το σφάλμα αυξάνεται, αυξάνοντας το βαθμό του πολυωνύμου.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2:** Υπολογίστε την πολυωνυμική προσέγγιση  $p(x)$  της  $f(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$ , έτσι ώστε η  $p(x)$  να συμφωνεί με την  $f$  στα σημεία  $x = a : s : b$  (συμβολισμός Matlab). Λέμε ότι το  $p$  παρεμβάλλει την  $f$  στα παραπάνω σημεία. ♣

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση  $f(x) = \exp(-4x^2)$  σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-3, 3]$ . Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣ ΛΥΣΗ

| n(σημεία) | Σφάλμα παρεμβολής |
|-----------|-------------------|
| 3         | 0.87267038        |
| 7         | 0.96786931        |
| 13        | 6.56057959        |
| 31        | 86.64594694       |
| 61        | 6.87406189        |

♣

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left( \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

ΛΥΣΗ

Ο πίνακας των σφαλμάτων είναι ο παρακάτω:

| n(σημεία) | Σφάλμα παρεμβολής |
|-----------|-------------------|
| 3         | 0.8726407         |
| 7         | 0.96794852        |
| 13        | 6.55855711        |
| 31        | 87.04271178       |
| 61        | 6.86828473        |

♣

Χρησιμοποιώντας τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:  $3 \cos \left( \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right)$ ,  $i = 0, \dots, n$  αντί για τα ισαπέχοντα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη άσκηση, παρατηρούμε ότι τα σφάλματα είναι σχεδόν το ίδιο όπως και στην άσκηση 2. Ακόμη το σφάλμα είναι πιο μεγάλο όταν  $n=31$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.** Έστω η συνάρτηση  $f|^{[a,b]}$  και  $n$  σημεία αυτής  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1, \dots, n$ , τέτοια ώστε  $a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ . Παρεμβάλετε κάθε ζεύγος συνεχόμενων σημείων με ένα πολυώνυμο βαθμού 0, 1 και 3 αντίστοιχα. Αυτές οι συναρτήσεις προσέγγισης ονομάζονται τμηματικά πολυώνυμα. Στην περίπτωση των πολυωνύμων τρίτου βαθμού, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε ζεύγος γειτονικών πολυωνύμων είτε έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους (οπότε ονομάζονται **κυβικές spline Hermite**), είτε έχουν συνεχείς τόσο τις πρώτες όσο και τις δεύτερες παραγώγους, οπότε ονομάζονται **κυβικές splines**. ♣

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την  $f(x) = \exp(-4x^2)$ , σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα  $[-3, 3]$ . Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σε ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σε ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας.

ΛΥΣΗ(4α)

| n(σημεία) | Σφάλμα παρεμβολής |
|-----------|-------------------|
| 7         | 0.25336776        |
| 13        | 0.01157648        |
| 31        | 0.00093140        |
| 61        | 0.00005240        |

♣

Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την  $f$  στο  $[-5, 5]$ . Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-5, 5]$ . ♣

ΛΥΣΗ(4β)

error=0.1384

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.** Έστω ότι δίνεται ένας πίνακας δεδομένων για τη συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x}$ :

|        |   |     |        |      |     |        |        |
|--------|---|-----|--------|------|-----|--------|--------|
| $x$    | 1 | 2   | ?      | 4    | 5   | 6      | 7      |
| $f(x)$ | 1 | 0.5 | 0.3333 | 0.25 | 0.2 | 0.1667 | 0.1429 |

και ζητείται να βρείτε την τιμή  $x$ , η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένη τιμή  $f(x)$ . Σε αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα συνίσταται στην επίλυση της μη γραμμικής εξίσωσης  $1/x=0.3333$ . Σε πολλές περιπτώσεις όμως η συνάρτηση δεν είναι γνωστή. Έτσι, σε αυτές τις περιπτώσεις πρέπει να εκτιμήσουμε το  $x$  από το πολυώνυμο παρεμβολής  $p(x)$  της  $f(x)$ . Δηλαδή, πρέπει να λύσουμε το μη-γραμμικό πρόβλημα  $p(x) = 0.3333$  για το δεδομένο πίνακα μετρήσεων. Εφόσον η  $p(x)$  είναι μια ομαλή συνάρτηση, κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί εύκολα με τις μεθόδους που παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 2 του βιβλίου των Γ. Ακριβή και Β. Δουγαλή 'Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση'. Μια ακόμη απλή αλλά όχι ιδιαίτερα αξιόπιστη μέθοδος είναι να κάνουμε τη γραφική παράσταση του  $x$  ως προς το  $f(x)$  και να χρησιμοποιήσουμε μια μέθοδο σαν την Lagrange για να υπολογίσουμε μια προσέγγιση του  $x$ , την οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε το  $x$  στο σημείο 0.3333. Δυστυχώς, με την αντιστροφή των μεταβλητών δεν είναι σίγουρο ότι οι τιμές κατά μήκος της νέας τετημένης (η οποία τώρα είναι η  $f(x)$ ) είναι ομοιόμορφα κατανομημένες, με αποτέλεσμα η παρεμβολή να παρουσιάζει ταλαντώσεις. Το πρόβλημα αυτό ονομάζεται το πρόβλημα της αντίστροφης παρεμβολής.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5.** Έστω  $f|_{[a,b]}$  μια ομαλή συνάρτηση. Ψάχνουμε να βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ ,  $p_n^*(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , το οποίο να ικανοποιεί τη σχέση  $\int_a^b w(x)(f(x) - p_n^*(x))^2 dx = \min_{p \in P_n} \int_a^b w(x)(f(x) - p(x))^2 dx$ . Αυτό το πολυώνυμο,  $p_n^*$ , ονομάζεται **προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων** της  $f$ . ♣

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6.** Αποδείξτε με μαθηματικό τρόπο, ότι τα πολυώνυμα  $T_0, T_1$  και  $T_2$ , όπου  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ , είναι ορθογώνια ως προς το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο. Χρησιμοποιήστε τα σαν βάση στο χώρο  $P_2([-1, 1])$  για να υπολογίσετε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της  $\exp(x)$ . Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, του πολυωνύμου και του σφάλματος. Ποιά η σχέση των  $T_i$  με τα πολυώνυμα Legendre;

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7.** Έστω το πολυώνυμο  $p_2(x) = \sum_{i=0}^2 a_i T_i(x)$ , όπου  $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$  και  $T_n(x) = \cos(n \cdot \cos^{-1} x)$ . Αποδείξτε με μαθηματικό τρόπο ότι τα πολυώνυμα  $T_i$  είναι ορθογώνια σε σχέση με τη συνάρτηση βάρους  $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$  και βρείτε την προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων της  $e^x$ . Τα πολυώνυμα  $T_i$  ονομάζονται *Chebyshev*. Υπολογίστε με μαθηματικό τρόπο τις ρίζες τους. Έχετε συναντήσει τα σημεία αυτά πριν; Σημειώστε ότι:

$$\int_{-1}^1 w(x) T_i(x) T_j(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } i \neq j \\ \pi, & \text{αν } i = j = 0 \\ \pi/2, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8.** Η απλούστερη περίπτωση προσέγγισης ελαχίστων τετραγώνων είναι η προσαρμογή μιας ευθείας γραμμής σε ένα σύνολο ζευγων παρατηρήσεων  $x$ - $y$ . Η τακτική αυτή λέγεται "**Γραμμική Παλινδρόμηση**". Η μαθηματική περιγραφή της ευθείας γραμμής είναι  $y = a_0 + a_1x + e$ , όπου  $a_0$  και  $a_1$  είναι συντελεστές που περιγράφουν το σημείο τομής με τον άξονα των τεταγμένων και την κλίση αντίστοιχα, ενώ  $e$  είναι το σφάλμα ή το υπόλοιπο μεταξύ του μοντέλου και των παρατηρήσεων.

Αν έχουμε  $n$  μετρήσεις,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n$  τότε μία νόρμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι η επέκταση της Ευκλείδειας στον  $\mathbf{R}^n$  για την οποία ισχύει:

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Η παραπάνω ευθεία,  $y = a_1x + a_0$ , αποτελεί βέλτιστη προσέγγιση εαν τα  $a_0$  και  $a_1$  είναι τέτοια ώστε να ελαχιστοποιείται η

$$\|\mathbf{y} - (a_1\mathbf{x} + a_0)\|_2.$$

*Βεβαιωθείτε ότι σας είναι κατανοητό γιατί μας αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε ως προς  $a_0$  και  $a_1$  την συνάρτηση  $\phi(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)^2$ .*

**Λύση.** Η λύση ισοδυναμεί με την επίλυση των παρακάτω εξισώσεων, οι οποίες αποτελούν επαρκείς συνθήκες για την ελαχιστοποίηση:

$\frac{\partial \phi}{\partial a_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i) = 0$  και  $\frac{\partial \phi}{\partial a_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i)x_i = 0$ . Είναι εύκολο να αποδειχτεί ότι  $a_1 = \frac{n \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$  και  $a_0 = \bar{y} - a_1 \bar{x}$ , όπου  $\bar{y}$  και  $\bar{x}$  είναι οι μέσες τιμές των  $y$  και  $x$  αντίστοιχα. *Βεβαιωθείτε ότι ξέρετε πως και γιατί καταλήγουμε σε αυτούς τους τύπους.*

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9.** Έστω ότι ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει την ταχύτητα του δικτύου στο χρονικό διάστημα  $[0, 3]$  σε 41 ισαπέχοντα σημεία. Υπολογίστε τα πολυώνυμα βαθμού 0 και 1 που προσεγγίζουν τα δεδομένα με τον καλύτερο τρόπο. Υπολογίστε όλους τους δείκτες για τα πολυώνυμα που θα βρείτε, όπως στο παράδειγμα 1. Χρησιμοποιήστε το Excel σε όλους σας τους υπολογισμούς. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο.

| Σημεία | Δεδομένα |         |         |         |         |         |
|--------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1      | 2.07458  | 1.78801 | 2.07548 | 1.97954 | 2.08945 | 1.63480 |
| 7      | 2.03053  | 1.74630 | 1.79267 | 1.42920 | 1.14101 | 1.32438 |
| 13     | 1.17944  | 0.93214 | 0.87631 | 0.80062 | 0.69002 | 0.79622 |
| 19     | 0.73527  | 0.60637 | 0.80011 | 0.95631 | 0.64858 | 0.95624 |
| 25     | 0.62853  | 0.55175 | 0.90018 | 1.00167 | 0.60299 | 1.05339 |
| 31     | 0.87300  | 0.99931 | 1.01089 | 1.11733 | 0.95633 | 1.15222 |
| 37     | 1.09389  | 0.86498 | 1.04563 | 1.11432 | 1.15554 |         |

♣

## ΛΥΣΗ

Το αρχείο EXCEL βρίσκεται στο φάκελο μαζί με τα αρχεία του Matlab.

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2<sup>ου</sup> βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των

τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣ ΛΥΣΗ

sse=1.39110942

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣ ΛΥΣΗ

1.Το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων του 4 βαθμού του πολυωνύμου είναι:0.91238292

2.Το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων του 8 βαθμού του πολυωνύμου είναι:0.66550637

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ.** Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους(Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gn ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες. ♣



**Σχήμα 7.** Βρείτε την πιο κατάλληλη μέθοδο για να αναπαραστήσετε τη γραμμή του προφίλ του κοριτσιού

**Οδηγίες παράδοσης:** Λύστε τις 7 Ασκήσεις που περιγράφονται μέσα στο φυλλάδιο-σημειώσεις. Παραδώστε τον Matlab κώδικα, το αρχείο Excel και το κείμενο με τα σχόλια σας μέσω του eClass. Τα *Προβλήματα* είναι προαιρετικά.

**Καλή επιτυχία.**