

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**  
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))  
**ΑΥΓΕΡΙΝΑΚΗΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**  
**A.M.1703039 ΑΕΜ: 310**

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης  $\frac{1}{1+25x^2}$ , καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα  $[-1, 1]$ . Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25000000	96.72523090
4	0.30769231	3.81250000	2592.07544886
6	0.30769231	-7.57812500	58431.83431360



**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση  $f(x) = \exp(-4x^2)$  σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-3, 3]$ . Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣

**Υπόδειξη:** Γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `matrixgenerator(x, n)`, όπου `x` το διάνυσμα με τις τετμημένες των σημείων της παρεμβολής και `n` το πλήθος τους, η οποία υπολογίζει και επιστρέφει τον πίνακα του αντίστοιχου συστήματος προς λύση. Επίσης γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `evaluatepolynomial(poly, m, t)`, όπου `poly` είναι το διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου, `m` ο βαθμός του και `t` η τετμημένη του σημείου στο οποίο υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου. Η συνάρτηση θα επιστρέφει την τιμή του πολυωνύμου. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Horner για να τον υπολογισμό της τιμής του πολυωνύμου. Το πρόγραμμα σας θα έχει την παρακάτω μορφή:

```
...
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i=1:5
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = length(x);
    a = matrixgenerator(x, n);
    [L, U] = lu(a);
    y = exp(-4*x.^2);
    yi = U \ (L \ y');
```

```

for k=1:n
    yy(k)=evaluatepolynomial(yi,n,x(k));
end;
...
end
...

```

Σημεία	Σφάλμα
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594694
61	6.87406189

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left( \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

Σημεία	Σφάλμα
3	0.99380400
7	0.68068888
13	0.20063964
31	0.00048050
61	0.00003693

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα είναι πολύ μικρότερο για μεγάλα  $n$  (κανόνας chebyshev)

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την  $f(x) = \exp(-4x^2)$ , σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα  $[-3, 3]$ . Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ' ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ' ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την  $f$  στο  $[-5, 5]$ . Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-5, 5]$ . ♣

(διάστημα $[-3, 3]$ ) Σημεία	Σφάλμα
7	0.14577340
13	0.04409902
31	0.01078115
61	0.00286114

  

(διάστημα $[-5, 5]$ ) Σημεία	Σφάλμα
13	0.04633926

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου  $2^{\text{ου}}$  βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣