

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1: Στο πρόβλημα αυτό, δοσμένης της συνάρτησης $\cos(x)$, δημιουργώ την προσέγγισή της σύμφωνα με τη μέθοδο Taylor ως προς το σημείο 0. Σύμφωνα με την προσέγγισή Taylor, μια ομαλή συνάρτηση f μπορεί να προσεγγιστεί από το πολυώνυμο Taylor βαθμού n , $p_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$, όπου ο βαθμός του πολυωνύμου καθορίζεται από την επιθυμητή ακρίβεια της προσέγγισης. Συγκεκριμένα στον αντίστοιχο κώδικα αφού δημιουργήσω το διάνυσμα x με την εντολή `linspace` από το $[-3\pi/2$ ως το $3\pi/2]$ (σε αυτό το διάστημα θα σχεδιάσω και τις δύο συναρτήσεις, την $\cos(x)$ και την προσέγγισή της), βρίσκω μία της παραγώγους κάθε τάξης της $\cos(x)$. Παρατηρώ ότι για $x = 0$ κάθε περιττή παράγωγος της $\cos(x)$ μηδενίζεται. Για να βρω μια πολύ καλή προσέγγιση της συνάρτησης, βρίσκω έως και την 14η παράγωγό της στο σημείο 0. Στη συνέχεια υπολογίζω το σφάλμα ως την απόλυτη τιμή της διαφοράς των δύο συναρτήσεων.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Στην άσκηση αυτή προσεγγίζω την συνάρτηση $\frac{1}{1+25x^2}$ χρησιμοποιώντας πάλι την μέθοδο του Taylor στο διάστημα $[-1,1]$. Στον αντίστοιχο κώδικα, αφού δημιουργήσω το διάνυσμα xx με τη συνάρτηση `linspace` για το διάστημα $[-1,1]$ βρίσκω τις παραγώγους έως και 6ου βαθμού (για $x=0$ οι περιττές παράγωγοι μηδενίζονται), για να τις χρησιμοποιήσω στο σχηματισμό των τριών πολυωνύμων. Στη συνέχεια υπολογίζω την τιμή του κάθε πολυωνύμου για $x=0$ και εν κατακλείδι βρίσκω τι σφάλμα προκύπτει από το κάθε πολυώνυμο. Για τι συγκεκριμένη συνάρτηση μπορούμε να πούμε ότι καθώς αυξάνεται η τάξη της παραγώγου αντί να έχουμε μια ακριβέστερη προσέγγιση, δημιουργείται μια πολυπλοκότερη η οποία πετυχαίνει κάθε φορά μια όχι και τόσο καλή προσέγγιση. Άρα η μέθοδος Taylor δεν ενδείκνυται για την προσέγγιση τέτοιου είδους συναρτήσεων. Ο αντίστοιχος πίνακας με τις τιμές των τιμών των πολυωνύμων (για $x=0$) και τα αντίστοιχα σφάλματα είναι ο παρακάτω:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25000000	96.72523090
4	0.30769231	3.81250000	2592.07544886
6	0.30769231	-7.57812500	58431.83431360

Μέθοδος 2: Πολυωνυμική Παρεμβολή Συναρτήσεων και Δεδομένων

ΑΣΚΗΣΗ 2: Στην άσκηση αυτή χρησιμοποιώ τη μέθοδο πολυωνυμικής παρεμβολής συναρτήσεων. Όταν λέμε ότι προσεγγίζουμε μια συνάρτηση μέσω παρεμβολής της προσέγγισης $p(x)$ στην $f(x)$ στα σημεία x_i , εννοούμε ότι για τη προσεγγιστική συνάρτηση θα ισχύει: $p(x_i) = f(x_i)$. Η συνάρτηση που δίνεται για παρεμβολή είναι η $f(x) = \exp(-4x^2)$ στο διάστημα $[-3,3]$. Στον αντίστοιχο κώδικα αρχικά υπολογίζω το `xplot` με τη `linspace` δίνοντας περιθώριο 601 σημεία, μετά δημιουργώ την συνάρτηση που θέλω να παρεμβάλω και στη συνέχεια με

ένα βρόγχο επανάληψης for κάθε φορά ορίζω τον πλήθος των ισαπέχοντων σημείων (3, 7, 13, 31, 61).Μέσα στο βρόγχο καλώ τη συνάρτηση matrixgenerator(x,n), όπου το x είναι το διάνυσμα με τις τετμημένες των σημείων της παρεμβολής και n το πλήθος τους,η οποία υπολογίζει και επιστρέφει τον πίνακα αντίστοιχου συστήματος προς λύση.Επίσης δημιουργήσα μια συνάρτηση με όνομα evaluatepolynomial(poly,m,t), όπου poly είναι το διάνυσμα με τους συντελεστές του πολυωνύμου, m ο βαθμός και t η τετμημένη του σημείου στο οποίο υπολογίζουμε την τιμή του πολυωνύμου, και επιστρέφει την τιμή του πολυωνύμου.Τη συνάρτηση αυτή τη καλώ μέσα σε ένα άλλο εμφολευμένη βρόγχο for:

```
for k=1:601 yy(k)=evaluatepolynomial(yi,n,xplot(k)); end
```

Επίσης μέσα στον αρχικό βρόγχο υπολογίζω για κάθε πλήθος σημείων το αντίστοιχο σφάλμα:

n	Εκτίμηση σφάλματος
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594694
61	6.87406189

ΑΣΚΗΣΗ 3:Στην άσκηση αυτή χρησιμοποιώ επίσης τη μέθοδο της πολυωνυμικής παρεμβολής συναρτήσεων .Αυτή τη φορά αντί να χρησιμοποιήσω ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιώ τα σημεία που προκύπτουν από το τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

,βάζοντας για παράδειγμα i=3:

i	n	Εκτίμηση σφάλματος
0	3	0.25000000
0	7	0.95640791
0	13	1.51311424
0	31	0.02315323
0	61	0.00001654
1	3	0.00000000
1	7	0.00000000
1	13	0.00000000
1	31	0.00000001
1	61	0.00000037
2	3	0.25000000
2	7	0.95640791
2	13	1.51311424
2	31	0.02315228
2	61	0.00001849

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα για i=2 ,έχουμε το μικρότερο σφάλμα έως και μηδενικό.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Σε αυτή την άσκηση κάνω προσέγγιση με τη μέθοδο τμηματικής παρεμβολής συναρτήσεων, όπου χρησιμοποιούμε τμηματικά πολυωνυμικές συναρτήσεις, στην περίπτωση των πολυωνύμων 3ου βαθμού ονομάζονται **κυβικές splines**. Η συνάρτηση που δίνεται είναι $f(x) = \exp(-4x^2)$ στο διάστημα $[-3, 3]$. Αρχικά δημιουργώ το x με τη `linspace` βάζοντας περιθώριο 601 σημεία, στη συνέχεια με ένα βρόχο `for` βρίσκω τα αντίστοιχα $y(i)$. Χρησιμοποιώ τη `spline` με τα 13 σημεία, για να υπολογίσω την f στο $[-5, 5]$. Στη συνέχεια για κάθε xi (σημείο παρεμβολής) βρίσκω το αντίστοιχο y_i και μετά υπολογίζω το σφάλμα. Στο σημείο $y_i = \text{interp1}(x, y, xi, 'spline')$ υλοποιούνται τα `splines`, το διάνυσμα x περιλαμβάνει τα σημεία στα οποία οι y τιμές είναι γνωστές.

n	Εκτίμηση σφάλματος
7	1.0000
13	1.0000
31	1.0000
61	1.0000

Στο δεύτερο μέρος της άσκησης χρησιμοποιώ τη `spline` με τα 13 σημεία, για να υπολογίσω την f στο $[-5, 5]$ και το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία στο $[-5, 5]$. Κάνω τα ίδια βήματα που έκανα και πριν μόνο που τώρα στη δημιουργία του xi μέσα στη `linspace` αντί να βάλω το `shmeia(i)`, βάζω κατευθείαν 13 και βρίσκω σφάλμα 1.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. Στην άσκηση αυτή θα χρησιμοποιήσω την τακτική της γραμμικής παλινδρόμησης (προσαρμογή μια ευθείας γραμμής σε ένα σύνολο γραμμών παρατηρήσεων $x-y$). Συγκεκριμένα πρέπει να βρω τα a_0 και a_1 , δηλαδή τους συντελεστές του πολυωνύμου $y = a_0 + a_1x + e$ που χρησιμοποιείται για την προσέγγιση. Μετά τον υπολογισμό των: $\sum x \cdot y, \sum x \cdot x, \sum y \cdot y$, Εκτίμηση του y (\tilde{y}), Σφάλμα ή υπόλοιπο $e_i = (y - \tilde{y})$, Τετράγωνο σφάλματος ή υπολοίπου με τη χρήση του Excel προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:

Δείκτες	Τιμές
$SSE = \sum (y - \tilde{y})^2$	4.981132954
$MSE = SSE/n$	0.121491048
$SST = \sum (y - \bar{y})^2/n$	8.351682025
n (αριθμός μετρήσεων)	41
$SSR (= SST - SSE)$	3.370549071
Συντελεστής προσδιορισμού $R^2 = SSR/SST$	0.403577275
Μέση τιμή του x	1.536585366
Μέση τιμή του y	1.15135439

Πίνακας 2: Δείκτες αξιολόγησης της ποιότητας της προσαρμογής.

Οι δοθείσες τιμές ταχύτητας του δικτύου είναι οι παρακάτω:

Σημεία	Δεδομένα					
1	2.07458	1.78801	2.07548	1.97954	2.08945	1.63480
7	2.03053	1.74630	1.79267	1.42920	1.14101	1.32438
13	1.17944	0.93214	0.87631	0.80062	0.69002	0.79622
19	0.73527	0.60637	0.80011	0.95631	0.64858	0.95624
25	0.62853	0.55175	0.90018	1.00167	0.60299	1.05339
31	0.87300	0.99931	1.01089	1.11733	0.95633	1.15222
37	1.09389	0.86498	1.04563	1.11432	1.15554	

ΑΣΚΗΣΗ 5. Και σ' αυτή την άσκηση χρησιμοποιώ τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων ώστε να υπολογίσω τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα (Πρόβλημα 9). Στον αντίστοιχο κώδικα τα `mat` υπολογίζω είναι τα x , ενώ είναι οι σταθεροί όροι στο δεξί μέρος το `synt` είναι τα a_0, a_1 και a_2 . Στο τέλος υπολογίζω τα SSE και SST. Τα αποτελέσματα του Matlab είναι:

`sse = 1.3911`

`sst = 1.7519e-005,`

ενώ το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών είναι 0.00001752

ΑΣΚΗΣΗ 6. Όπως ακριβώς και στην προηγούμενη άσκηση κάνω τα ίδια βήματα. Ακριβέστερα αφού δημιουργήσω τα x και ορίσω τα y , χρησιμοποιώ την `polyfit(x,y,n)`, η οποία κάνει προσέγγιση ελαχίστων τετραγώνων με βαθμό πολυωνύμου n , επίσης χρησιμοποιώ την `polyval`, η οποία παίρνει τα x και y και επιστρέφει το τελικό πολυώνυμο. Χρησιμοποιώ τις δύο αυτές συναρτήσεις δύο φορές μια με $n=4$ και μια με $n=8$. Για το πολυώνυμο 4^{ου} βαθμού το άθροισμα των τετραγώνων διαφορών είναι σύμφωνα με το Matlab 0.9124 ενώ για το πολυώνυμο 8^{ου} είναι 0.6655