

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ**  
**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΗΥ200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ**

**Μπούσια Αλεξάνδρα Α.Ε.Μ:284**

**ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων**

**ΑΣΚΗΣΗ 1:** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Taylor για τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης  $\frac{1}{1+25x^2}$  βρίσκουμε τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα  $[-1, 1]$ . Παρακάτω φαίνεται ο πίνακας συμπληρωμένος:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25000000	9.67252309
4	0.30769231	3.81250000	2592.07544886
6	0.30769231	-7.57812500	58431.83431360

**Σημείωση/Υπόδειξη.** Δίνονται οι παράγωγοι της  $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -\frac{50}{(1+25x^2)^2} x \\ \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 50 \frac{75x^2-1}{(1+25x^2)^3} \\ \frac{d^3}{dx^3} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15000x \frac{-1+25x^2}{(1+25x^2)^4} \\ \frac{d^4}{dx^4} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15000 \frac{1+3125x^4-250x^2}{(1+25x^2)^5} \\ \frac{d^5}{dx^5} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -3750000x \frac{3+1875x^4-250x^2}{(1+25x^2)^6} \\ \frac{d^6}{dx^6} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 11250000 \frac{-1+525x^2-21875x^4+109375x^6}{(1+25x^2)^7} \\ \frac{d^7}{dx^7} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15750000000x \frac{-1+175x^2-4375x^4+15625x^6}{(1+25x^2)^8} \\ \frac{d^8}{dx^8} \left( \frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15750000000 \frac{1-900x^2-1312500x^6+3515625x^8+78750x^4}{(1+25x^2)^9}\end{aligned}$$

Από τα αποτελέσματα βλέπουμε πως το σφάλμα αυξάνεται όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου. Ουσιαστικά κανένα πολυώνυμο δεν προσεγγίζει την ζητούμενη συνάρτηση σε ικανοποιητικό βαθμό.

**ΑΣΚΗΣΗ 2:** Υπολογίζουμε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση  $f(x) = \exp(-4x^2)$  σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-3, 3]$ . Παρακάτω παραθέτουμε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα.

To sfalma me polywnymo parembolhs se 3 shmeia einai 0.87267038

To sfalma me polywnymo parembolhs se 7 shmeia einai 0.96786931

To sfalma me polywnymo parembolhs se 13 shmeia einai 6.56057959

To sfalma me polywnymo parembolhs se 31 shmeia einai 86.64594694

To sfalma me polywnymo parembolhs se 61 shmeia einai 6.87406189

Παρατηρούμε ότι για 31 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος  $[-3, 3]$  η παρεμβολή παρουσιάζει το μεγαλύτερο σφάλμα.

**ΑΣΚΗΣΗ 3:** Όπως και στην προηγούμενη άσκηση, αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιούμε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left( \frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

To sfalma me polywnymo parembolhs se 3 shmeia einai 0.99380400

To sfalma me polywnymo parembolhs se 7 shmeia einai 0.68068888

To sfalma me polywnymo parembolhs se 13 shmeia einai 0.20063964

To sfalma me polywnymo parembolhs se 31 shmeia einai 0.00048050

To sfalma me polywnymo parembolhs se 61 shmeia einai 0.00002501

Από τα παραπάνω αποτελέσματα παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το πλήθος των σημείων, το σφάλμα μειώνεται.

**ΑΣΚΗΣΗ 4.** Υπολογίζουμε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την  $f(x) = \exp(-4x^2)$ , σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα  $[-3, 3]$ .

Για το διάστημα  $[-3, 3]$  έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

n	Εκτίμηση σφάλματος
7	0.2534
13	0.0116
31	9.3140e-004
61	5.2400e-005

Για το διάστημα  $[-5,5]$  έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

n	Εκτίμηση σφάλματος
13	0.1384

**ΑΣΚΗΣΗ 5.** Χρησιμοποιώντας τα παρακάτω δεδομένα από το πρόβλημα 9 υπολογίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2<sup>ου</sup> βαθμού χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Σημεία	Δεδομένα					
1	2.07458	1.78801	2.07548	1.97954	2.08945	1.63480
7	2.03053	1.74630	1.79267	1.42920	1.14101	1.32438
13	1.17944	0.93214	0.87631	0.80062	0.69002	0.79622
19	0.73527	0.60637	0.80011	0.95631	0.64858	0.95624
25	0.62853	0.55175	0.90018	1.00167	0.60299	1.05339
31	0.87300	0.99931	1.01089	1.11733	0.95633	1.15222
37	1.09389	0.86498	1.04563	1.11432	1.15554	

Η προσέγγιση είναι αρκετά ικανοποιητική όπως παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών είναι 1.3911.

**ΑΣΚΗΣΗ 6.** Υπολογίζουμε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα από το πρόβλημα 9 με το βέλτιστο τρόπο.

Τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών φαίνονται παρακάτω:

Βαθμός πολυωνύμου	sse
4	0.9124
8	0.6655