

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΗΥ200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

ΟΝΟΜΑ : ΖΥΓΟΥΡΑ ΒΑΪΑ
ΑΕΜ : 301

ΑΣΚΗΣΗ 1: Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές των πολυωνύμων 2, 4 και 6 βαθμού ως προς το σημείο 0, της $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25000000	96.72523090
4	0.30769231	3.81250000	2592.07544886
6	0.30769231	-7.57812500	58431.83431360

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Από τον παραπάνω πίνακα καθώς και απο τις γραφικές συναρτήσεις που προκύπτουν διαπιστώνουμε πως κανένα απο τα πολυώνυμά μας δεν προσεγγίζει σωστά την συνάρτηση μιας και η τιμή της είναι πολύ διαφορετική (πολύ μικρότερη) σε σχέση με τις τιμές των πολυωνύμων. Τέλος βλέπουμε πως όσο μεγαλύτερος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο μεγαλύτερο είναι και το σφάλμα μας

ΑΣΚΗΣΗ 2: Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα σφάλματα των πολυωνύμων ανάλογα με τον αριθμό των σημείων που επιλέγουμε.

Αριθμός σημείων	Εκτίμηση σφάλματος
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594694
61	6.87406189

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:Από τον πίνακα αλλά κυρίως από την γραφική παράσταση όπου απεικονίζονται και τα πολυώνυμα παρεμβολής στα διάφορα σημεία συμπεραίνουμε ότι:

i) όσο περισσότερα σημεία παίρνω τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση της συνάρτησης στο κέντρο της ενώ παράλληλα έχω πιο μεγάλες αποκλίσεις στα άκρα της. Στο παράδειγμά μας όταν επιλέγουμε να έχουμε 61 σημεία βλέπουμε πως η προσέγγιση είναι τόσο καλή που σχεδόν συμπίπτει με την γραφική παράσταση της $f(x) = \exp(-4x^2)$ και

ii) όσο λιγότερα σημεία παίρνω τόσο πιο καλή είναι η προσέγγιση της συνάρτησης στα άκρα της ενώ παράλληλα έχω πιο μεγάλες αποκλίσεις στο κέντρο. Στο παράδειγμά μας όταν έχουμε 3 σημεία βλέπουμε πως η προσέγγιση είναι στα άκρα είναι πολύ καλή ενώ στο κέντρο δεν αγγίζει σχεδόν καθόλου την γραφική παράσταση της $f(x) = \exp(-4x^2)$

Είναι επίσης σημαντικό να αναφέρουμε πως η μορφή της γραφική παράστασης με τα πολυώνυμα παρεμβολής μας θυμίζει το φαινόμενο Runge. Πρόκειται για το φαινόμενο κατά το οποίο, καθώς ο βαθμός το πολυωνύμου αυξάνει, τα πολυώνυμα δείχνουν μια αστάθεια. Όταν ο αριθμός n είναι μεγάλος το πολυώνυμο παρεμβολής συμπίπτει με τις τιμές της συνάρτησης $f(x)$, ενώ παρατηρούμε πως μεταξύ των σημείων παρεμβολής εμφανίζονται ταλαντώσεις το πλάτος των οποίων αυξάνεται καθώς αυξάνεται το n . Στο μεσαίο διάστημα, όπως αναφέραμε προηγουμένως και στο παράδειγμά μας, η πολυωνυμική παρεμβολή συμπεριφέρεται με ευστάθεια και δίνει καλύτερα αποτελέσματα.

Από όλα τα παραπάνω κατανοούμε πως δεν μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα ως προς την βέλτιστη

λύση. Απλά υποθέτουμε πως ένας ενδιαμέσος αριθμός σημείων θα μπορούσε να έχει μια ικανοποιητική προσέγγιση στο κέντρο χωρίς να έχει τεράστιες αποκλίσεις στα άκρα

ΑΣΚΗΣΗ 3: Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα σφάλματα των πολυωνύμων ανάλογα με τον αριθμό των σημείων που επιλέγουμε τα οποία και έχουν προκύψει από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Αριθμός σημείων	Εκτίμηση σφάλματος
3	0.99355898
7	0.68045626
13	0.20048991
31	0.00047881
61	0.00003506

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:Από τον πίνακα αλλά κυρίως από την γραφική παράσταση όπου απεικονίζονται και τα πολυώνυμα παρεμβολής στα διάφορα σημεία βλέπουμε πως όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων τόσο μικραίνει και το σφάλμα. Το προηγούμενο έχει ως αποτέλεσμα στην γραφική μας συνάρτηση όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σημείων τόσο καλύτερη είναι και η προσέγγιση. Μάλιστα στις περιπτώσεις που έχουμε 31 και 61 σημεία τα πολυώνυμα παρεμβολής σχεδόν συμπίπτουν με την $f(x) = \exp(-4x^2)$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Στον παρακάτω πίνακα υπολογίζονται οι κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 καθώς και τα σφάλματα.

Αριθμός σημείων	Εκτίμηση σφάλματος
7	0.25336776
13	0.01157648
31	0.00093140
61	0.00005240

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ: Από τον πίνακα και την γραφική παράσταση όπου απεικονίζονται και οι κυβικές spline στα διάφορα σημεία βλέπουμε πως όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων τόσο μικραίνει και το σφάλμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα στην γραφική μας συνάρτηση όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός των σημείων τόσο καλύτερη είναι και η προσέγγιση.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε πως η μέθοδος των κυβικών splines μας δίνει μικρότερα σφάλματα από την προηγούμενη μέθοδο.

Στην δεύτερη περίπτωση όπου έχουμε 13 σημεία και 1001 ισαπέχοντα σημεία σε διάστημα $[-5,5]$ το σφάλμα είναι 0.1384. Και εδώ έχουμε καλή προσέγγιση της $f(x) = \exp(-4x^2)$ με την κυβική της spline.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα είναι 1.3911

ΑΣΚΗΣΗ 6. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων θα είναι 0.9124 και 0.6655 για τα πολυώνυμα $4^{\text{ου}}$ και $8^{\text{ου}}$ βαθμού αντίστοιχα

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε πως όσο αυξάνεται ο βαθμός του πολυωνύμου τόσο μειώνεται και το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Από όλες τις μεθόδους η πιο κατάλληλη είναι η μέθοδος της παρεμβολής γιατί θέλουμε να περνάει από όλα τα σημεία της εικόνας και όχι από μερικά. Την χρησιμοποιούμε γιατί θέλουμε να περνάει ακριβώς από τα σημεία και όχι απλά κοντά. Αν δεν την χρησιμοποιούσαμε τότε θα είχαμε παραμόρφωση της εικόνας.

Τέλος εργασίας