

Όνομα : Σιμήτα Παρασκευή

Username : pasimita

AEM : 272

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων
(Ημερομηνία Παράδοσης: Κυριακή 15/5/2005, (Ώρα: 23:55))

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25	96.7252309
4	0.30769231	3.8125	2592.07544886
6	0.30769231	-7.578125	58431.8343136



Σημείωση/Υπόδειξη. Δίνονται οι παράγωγοι της $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -\frac{50}{(1+25x^2)^2} x \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 50 \frac{75x^2-1}{(1+25x^2)^3} \\ \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15000x \frac{-1+25x^2}{(1+25x^2)^4} \\ \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15000 \frac{1+3125x^4-250x^2}{(1+25x^2)^5} \\ \frac{d^5}{dx^5} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -3750000x \frac{3+1875x^4-250x^2}{(1+25x^2)^6} \\ \frac{d^6}{dx^6} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 11250000 \frac{-1+525x^2-21875x^4+109375x^6}{(1+25x^2)^7} \\ \frac{d^7}{dx^7} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15750000000x \frac{-1+175x^2-4375x^4+15625x^6}{(1+25x^2)^8} \\ \frac{d^8}{dx^8} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15750000000 \frac{1-900x^2-131250x^6+3515625x^8+78750x^4}{(1+25x^2)^9}\end{aligned}$$

Το πολυώνυμο 6ου βαθμού μας δίνει την καλύτερη παρεμβολή όταν βρισκόμαστε πολύ κοντά στο σημείο 0. Σαν δεύτερη μεγαλύτερη ακρίβεια, όσο είμαστε κοντά στο 0, έχουμε το πολυώνυμο 4ου βαθμού και τέλος το πολυώνυμο βαθμού 2. Όμως, όσο απομακρυνόμαστε από το 0, έχουμε μικρότερο σφάλμα για το πολυώνυμο βαθμού 2 και το σφάλμα μεγαλώνει όταν αντίστοιχα μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και

των πολωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣

Υπόδειξη: Γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `matrixgenerator(x, n)`, όπου x το διάνυσμα με τις τετημμένες των σημείων της παρεμβολής και n το πλήθος τους, η οποία υπολογίζει και επιστρέφει τον πίνακα του αντίστοιχου συστήματος προς λύση. Επίσης γράψτε μια συνάρτηση με όνομα `evaluatepolynomial(poly, m, t)`, όπου `poly` είναι το διάνυσμα με τους συντελεστές του πολωνύμου, m ο βαθμός του και t η τετημμένη του σημείου στο οποίο υπολογίζουμε την τιμή του πολωνύμου. Η συνάρτηση θα επιστρέφει την τιμή του πολωνύμου. Χρησιμοποιήστε τον κανόνα του Horner για να τον υπολογισμό της τιμής του πολωνύμου. Το πρόγραμμα σας θα έχει την παρακάτω μορφή:

```
...
shmeia = [3 7 13 31 61];
for i=1:5
    x = linspace(-3, 3, shmeia(i));
    n = length(x);
    a = matrixgenerator(x, n);
    [L, U] = lu(a);
    y = exp(-4*x.*2);
    yi = U \ (L \ y');
    for k=1:n
        yy(k)=evaluatepolynomial(yi, n, x(k));
    end;
...
end
...
```

Αριθμός σημείων	Σφάλμα
3	0.87267038
7	0.96786931
13	6.56057959
31	86.64594694
61	6.87406189

Μέχρι τα 31 ισαπέχοντα σημεία έχουμε πάρα πολύ μεγάλο σφάλμα. Μετά, το σφάλμα ξανα-μικραίνει.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

Σημείωση. Αυτή η μέθοδος πρέπει να αποφεύγεται, γιατί οι λύσεις των εξισώσεων Vandermode συμπεριφέρονται παράξενα για μεγάλα n .

Αριθμός σημείων	Σφάλμα
3	0.993804
7	0.68068888
13	0.20063964
31	0.0004805
61	0.00002501

Το σφάλμα μικραίνει όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων. Παρατηρούμε έτσι ότι ο τρόπος με τον οποίο διαλέγουμε τα σημεία επηρεάζει κατά πολύ τα αποτελέσματα του σφάλματος.

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ' ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ' ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$. ♣

Αριθμός σημείων	Σφάλμα
3	1.35666667
7	153.95610447
13	1080.532778
31	298319867521585.5
61	3445502887858862600

Το σφάλμα με κυβικές splines σε 13 σημεία για την f στο $[-5, 5]$ είναι 639278.56668671. Το σφάλμα αυξάνει όσο αυξάνει ο αριθμός των σημείων. Στην γραφική παράσταση, βλέπουμε ότι κοντά στα σημεία 1 και -1, τα splines είναι πολύ κοντά στην αρχική συνάρτηση. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των σημείων, τα splines παραμένουν πιο κοντά στην αρχική (όταν πάμε προς το -2) και αποκτούν πολύ μεγάλο σφάλμα όταν ξεπερνάνε το -2.

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣ Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών είναι $(SSE) = 1,3911$.

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣ Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών για

το πολυώνυμο 4ου βαθμού είναι $sse = 0.9124$

Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών για το πολώνυμο 8ου βαθμού είναι $sse = 0.6655$
Όσο αυξάνει ο βαθμός του πολωνύμου, μικραίνει και το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους(Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gn ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες. ♣