

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ & ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Μέθοδος Taylor και πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

ΑΣΚΗΣΗ 1: Υπολογίστε με τη μέθοδο Taylor, τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$, καθώς και τα άνω φράγματα του σφάλματος σε κάθε περίπτωση για το διάστημα $[-1, 1]$. Τι συμπεραίνετε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση; Συμπληρώστε τον πίνακα:

| n | f(.3) | p(.3) | Εκτίμηση σφάλματος |
|---|-------|-------|--------------------|
| 2 | | | -0.262 |
| 4 | | | -0.164 |
| 6 | | | -0.170 |

♣

Σημείωση/Υπόδειξη. Δίνονται οι παράγωγοι της $f(x) = \frac{1}{(1+25x^2)}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -\frac{50}{(1+25x^2)^2} x \\ \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 50 \frac{75x^2-1}{(1+25x^2)^3} \\ \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15000x \frac{-1+25x^2}{(1+25x^2)^4} \\ \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15000 \frac{1+3125x^4-250x^2}{(1+25x^2)^5} \\ \frac{d^5}{dx^5} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -3750000x \frac{3+1875x^4-250x^2}{(1+25x^2)^6} \\ \frac{d^6}{dx^6} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 11250000 \frac{-1+525x^2-21875x^4+109375x^6}{(1+25x^2)^7} \\ \frac{d^7}{dx^7} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= -15750000000x \frac{-1+175x^2-4375x^4+15625x^6}{(1+25x^2)^8} \\ \frac{d^8}{dx^8} \left(\frac{1}{(1+25x^2)} \right) &= 15750000000 \frac{1-900x^2-1312500x^6+3515625x^8+78750x^4}{(1+25x^2)^9} \end{aligned}$$

Μέθοδος 2: Πολυωνυμική Παρεμβολή Συναρτήσεων και Δεδομένων

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίστε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$. Κάντε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης και των πολυωνύμων σε ένα γραφικό παράθυρο και υπολογίστε το σφάλμα (τη μέγιστη κατά απόλυτη τιμή της διαφοράς του πολυωνύμου από τη συνάρτηση) για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα. ♣

ΑΣΚΗΣΗ 3: Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, όπου αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιήστε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

Γράψτε τις παρατηρήσεις σας και τα συμπεράσματά σας. ♣

Σημείωση. Αυτή η μέθοδος πρέπει να αποφεύγεται, γιατί οι λύσεις των εξισώσεων Vandermode συμπεριφέρονται παράξενα για μεγάλα n .

Μέθοδος 3: Τμηματική πολυωνυμική παρεμβολή συναρτήσεων και δεδομένων

ΑΣΚΗΣΗ 4. Υπολογίστε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$. Κάντε τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης και των spline σ' ένα γραφικό παράθυρο, και υπολογίστε σε κάθε περίπτωση το μέγιστο κατά απόλυτη τιμή σφάλμα χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία. Παρουσιάστε τα σφάλματα σ' ένα πίνακα, και γράψτε τα σχόλια σας. Χρησιμοποιήστε τη spline με τα 13 σημεία, για να υπολογίσετε την f στο $[-5, 5]$. Κάντε την γραφική παράσταση και υπολογίστε το σφάλμα σε 1001 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-5, 5]$. ♣

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ.

| Σημεία | Δεδομένα | | | | | |
|--------|----------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1 | 2.07458 | 1.78801 | 2.07548 | 1.97954 | 2.08945 | 1.63480 |
| 7 | 2.03053 | 1.74630 | 1.79267 | 1.42920 | 1.14101 | 1.32438 |
| 13 | 1.17944 | 0.93214 | 0.87631 | 0.80062 | 0.69002 | 0.79622 |
| 19 | 0.73527 | 0.60637 | 0.80011 | 0.95631 | 0.64858 | 0.95624 |
| 25 | 0.62853 | 0.55175 | 0.90018 | 1.00167 | 0.60299 | 1.05339 |
| 31 | 0.87300 | 0.99931 | 1.01089 | 1.11733 | 0.95633 | 1.15222 |
| 37 | 1.09389 | 0.86498 | 1.04563 | 1.11432 | 1.15554 | |

♣

ΑΣΚΗΣΗ 5. Εργαστείτε όπως Πρόβλημα 8 για να βρείτε τους κατάλληλους τύπους και να υπολογίσετε τους συντελεστές του πολυωνύμου $2^{\text{ου}}$ βαθμού που προσεγγίζει τα παραπάνω δεδομένα με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Χρησιμοποιήστε το Matlab για τους υπολογισμούς σας. Υπολογίστε το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΑΣΚΗΣΗ 6. Χρησιμοποιήστε κατάλληλες συναρτήσεις/διαδικασίες του Matlab, οι οποίες εφαρμόζουν την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, για να υπολογίσετε τα πολυώνυμα βαθμού 4 και 8, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα με το βέλτιστο τρόπο. Υπολογίστε τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών, και συγκρίνετε με το αντίστοιχο άθροισμα της προηγούμενης άσκησης. Κάντε τη γραφική παράσταση των σημείων αλλά και των πολυωνύμων στο ίδιο γραφικό παράθυρο. ♣

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΑΣΚΗΣΗ. Τώρα που γνωρίζετε δυο βασικές μεθόδους (Παρεμβολή και Προσέγγιση με τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων) και τις διαφορετικές περιπτώσεις που τις χρησιμοποιούμε, είστε σε θέση να αποφασίσετε ποιά μέθοδο είναι η κατάλληλη για να προσεγγίσουμε το προφίλ του κοριτσιού στο σκίτσο της φωτογραφίας χωρίς να αλλοιώσουμε τα χαρακτηριστικά της. Χρησιμοποιήστε ένα πρόγραμμα (ghostview, gs, gv ... etc) για να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων του προφίλ. Θα πρέπει να τηρήσετε τη κλίμακα ώστε να μην αλλάξουν οι αναλογίες. ♣