

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ, ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
HY200: ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

Κοσμοπούλου Ιωάννα Α.Ε.Μ:294

ΕΡΓΑΣΙΑ 2: Προσέγγιση συναρτήσεων και δεδομένων: Με την βοήθεια της μεθόδου Taylor και με πολυωνυμική παρεμβολή - Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων

ΑΣΚΗΣΗ 1: Με τη χρήση της μεθόδου Taylor για τα πολυώνυμα βαθμού 2, 4 και 6 ως προς το σημείο 0, της συνάρτησης $\frac{1}{1+25x^2}$ βρίσκουμε τα άνω φράγματα του σφάλματος για όλες τις περιπτώσεις και για το διάστημα $[-1, 1]$. Παρακάτω φαίνεται ο ζητούμενος πίνακας:

n	f(.3)	p(.3)	Εκτίμηση σφάλματος
2	0.30769231	-1.25000000	9.67252309
4	0.30769231	3.81250000	2592.07544886
6	0.30769231	-7.57812500	58431.83431360

Παρατηρήσεις: Από τα αποτελέσματα του κώδικα Matlab που τρέξαμε βλέπουμε πως όσο μεγαλώνει ο βαθμός του πολυωνύμου το σφάλμα αυξάνεται. Επίσης κανένα πολυώνυμο δεν προσεγγίζει την συνάρτηση που μας δίνεται σε ικανοποιητικό βαθμό.

ΑΣΚΗΣΗ 2: Υπολογίζουμε τα πολυώνυμα που παρεμβάλλουν τη συνάρτηση $f(x) = \exp(-4x^2)$ σε 3, 7, 13, 31, 61 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$ και υπολογίζουμε το σφάλμα για κάθε πολυώνυμο, χρησιμοποιώντας 601 ισαπέχοντα σημεία στο παραπάνω διάστημα:

To sfalma me polywnymo parembolhs se 3 shmeia einai 0.87267038

To sfalma me polywnymo parembolhs se 7 shmeia einai 0.96786931

To sfalma me polywnymo parembolhs se 13 shmeia einai 6.56057959

To sfalma me polywnymo parembolhs se 31 shmeia einai 86.64594694

To sfalma me polywnymo parembolhs se 61 shmeia einai 6.87406189

Παρατηρήσεις: Παρατηρούμε ότι για 31 ισαπέχοντα σημεία του διαστήματος $[-3, 3]$ η παρεμβολή παρουσιάζει το μεγαλύτερο σφάλμα.

ΑΣΚΗΣΗ 3: Κάνουμε οτι και στην προηγούμενη άσκηση, μόνο που αντί για ισαπέχοντα σημεία, χρησιμοποιούμε τα σημεία που προκύπτουν από τον τύπο:

$$3 \cos \left(\frac{2i+1}{n+1} \frac{\pi}{2} \right), \quad i = 0, \dots, n$$

και βρίσκουμε τα εξής σφάλματα:

Το σφάλμα με polywyno parembolhs se 3 shmeia einai 0.99380400

Το σφάλμα με polywyno parembolhs se 7 shmeia einai 0.68068888

Το σφάλμα με polywyno parembolhs se 13 shmeia einai 0.20063964

Το σφάλμα με polywyno parembolhs se 31 shmeia einai 0.00048050

Το σφάλμα με polywyno parembolhs se 61 shmeia einai 0.00002501

Παρατηρήσεις: Από τα παραπάνω παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε το πλήθος των σημείων, το σφάλμα μειώνεται.

ΑΣΚΗΣΗ 4: Υπολογίζουμε τις κυβικές spline που παρεμβάλλουν την $f(x) = \exp(-4x^2)$, σε 7, 13, 31 και 61 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $[-3, 3]$.

Για το διάστημα $[-3, 3]$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

n	Εκτίμηση σφάλματος
7	0.2534
13	0.0116
31	9.3140e-004
61	5.2400e-005

Για το διάστημα $[-5, 5]$ έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

n	Εκτίμηση σφάλματος
13	0.1384

ΑΣΚΗΣΗ 5: Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του προβλήματος 9 υπολογίζουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου 2^{ου} βαθμού χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

Σημεία	Δεδομένα					
1	2.07458	1.78801	2.07548	1.97954	2.08945	1.63480
7	2.03053	1.74630	1.79267	1.42920	1.14101	1.32438
13	1.17944	0.93214	0.87631	0.80062	0.69002	0.79622
19	0.73527	0.60637	0.80011	0.95631	0.64858	0.95624
25	0.62853	0.55175	0.90018	1.00167	0.60299	1.05339
31	0.87300	0.99931	1.01089	1.11733	0.95633	1.15222
37	1.09389	0.86498	1.04563	1.11432	1.15554	

Παρατηρήσεις: Η προσέγγιση είναι ικανοποιητική όπως παρατηρούμε από τη γραφική παράσταση. Το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών είναι 1.3911.

ΑΣΚΗΣΗ 6: Βρίσκουμε τα πολυώνυμα 2^{ου} και 8^{ου} βαθμού, που προσεγγίζουν τα παραπάνω δεδομένα από το πρόβλημα 9 με το βέλτιστο τρόπο.

Τα αθροίσματα των τετραγώνων των διαφορών φαίνονται παρακάτω:

Βαθμός πολυωνύμου	sse
4	0.9124
8	0.6655

Τέλος Εργασίας!