Λ. Ζαχείλας
Επίκουρος Καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
Τμήμα Οικονομικών Επιστημών
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Οικονομική Δυναμική

Διαγράμματα φάσης μιας μεταβλητής

Έστω $x = x(t)$ μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου και $x'(t)$: μια αυτόνομη δ. εξ.

Δηλ. εξαρτάται από την μεταβλητή x, αλλά όχι από τον χρόνο t

Κάθε χρονική στιγμή t μπορούμε να ορίσουμε την $x'(t)$

Λύση $x = x(t)$ της δ. εξ.

Τροχιά (orbit, trajectory)

Ο άξονας – x που περιέχει την τροχιά, ονομάζεται γραμμή φάσης (phase line)

Όταν $x'(t) = 0$, τότε λέμε ότι το σύστημα βρίσκεται σε ηρεμία

Και ας υποθέσουμε ότι αυτό συμβαίνει σε κάποια χρονική στιγμή $t = t_0$.

Τότε η λύση: $x(t_0) = x_*$

Σημείο ηρεμίας

Σημείο ισορροπίας

Σταθερό σημείο (fixed point)

Λύση σταθερής κατάστασης

Παραδείγματα

1. Στην δ. εξ. του Malthus: $p'(t) = k \cdot p$

Υπάρχει ΜΟΝΟ ένα σταθερό σημείο: $p'(t) = 0 \Rightarrow k \cdot p = 0 \Rightarrow p_* = 0$

2. Στην λογιστική δ. εξ. : $x'(t) = k \cdot x \cdot (a - x)$

Υπάρχουν <u>δύο</u> σταθερά σημεία: $x'(t) = 0 \Rightarrow k \cdot x \cdot (a - x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_* = 0 \\ x_* = a \end{cases}$

3. Στην δ. εξ. Harrod – Domar: $\dot{Y} - \frac{s}{v} Y = 0$

Υπάρχει ΜΟΝΟ ένα σταθερό σημείο: $\dot{Y} = 0 \Rightarrow \frac{s}{v} Y = 0 \Rightarrow Y = 0$

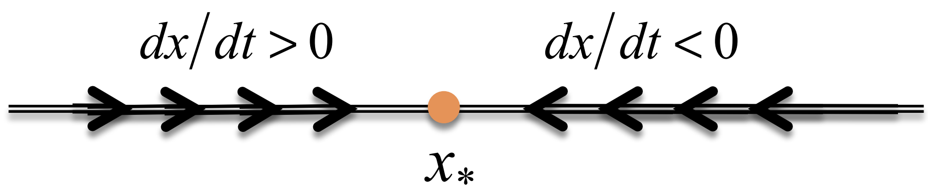
4. <u>**Άσκηση**</u>: Βρείτε τα σταθερά σημεία στην δ. εξ. του Sollow (εξ. 3, διαφ. 24), αν οι παράμετροι έχουν τις εξής τιμές: $r = 4$, $a = 0{,}25$, $s = 0{,}1$, $\delta = 0{,}4$ και $n = 0{,}03$.

Και με συνάρτηση παραγωγής Cobb – Douglas: $Y = rK^a L^{1-a} \quad ,0 < a < 1$

<u>Ερώτημα</u> (*μαθηματικοφιλοσοφικό*): Ένα σύστημα <u>κινείται προς</u> το (ή τα) σταθερό (-ά) σημείο (-α) του; Ή <u>απομακρύνεται</u> από αυτό (-ά);

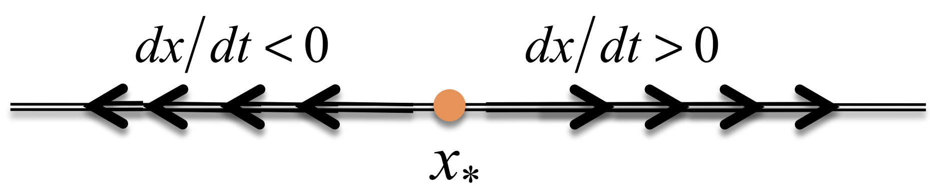
<u>Απάντηση</u>:

- Μια τροχιά πλησιάζει ένα σταθερό σημείο (f.p.) $\Leftrightarrow t \to \infty \quad , \quad x(t) \to x_*$



Ελκυστής
(attractor)

- Μια τροχιά απομακρύνεται από ένα σταθερό σημείο (f.p.) $\Leftrightarrow t \to \infty \quad , \quad x(t) \not\to x_*$



Απωθητής
(repellor)

- Μια τροχιά που στην αρχή πλησιάζει ένα σταθερό σημείο και μετά απομακρύνεται, τότε το σταθερό σημείο ονομάζεται σημείο <u>διακλάδωσης</u> (shunt) (προς τα δεξιά ή αριστερά)

Παράδειγμα 1.

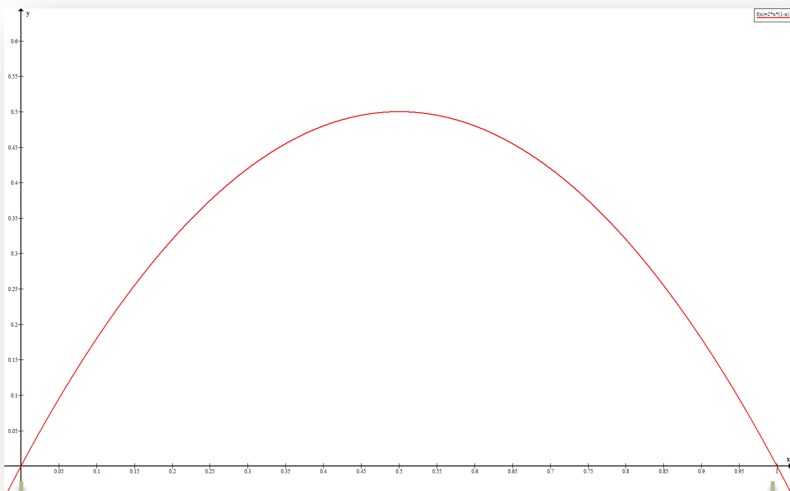
Έστω η «λογιστική» δ. εξ. : $x'(t) = k \cdot x \cdot (a - x)$

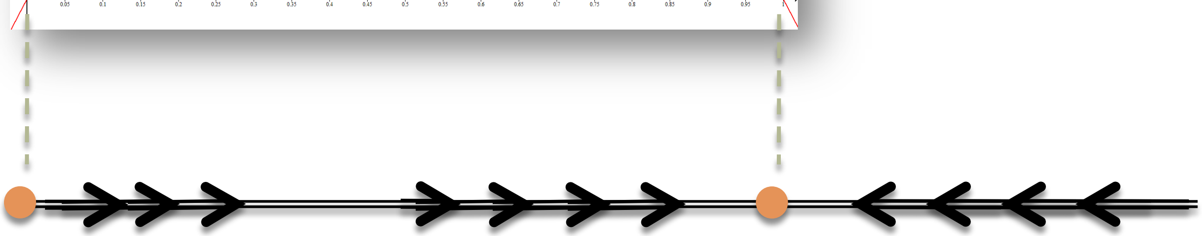
Και ας θέσουμε (*για χάρη του παραδείγματος*): $a = 1$ & $k = 2$

Χρησιμοποιείστε το Graph 4.3 για να κάνετε τη γραφική παράσταση $dx/dt \ vs.\ x$

&

Χρησιμοποιείστε το Maxima για να κάνετε την γραφική επίλυση της δ. εξ., επιλέγοντας διάφορες αρχικές συνθήκες





$x_* = 0$ $\qquad$ $x_* = a$

Ισορροπία (5+1 σημαντικοί ορισμοί)

1. Αν μια τροχιά, που ξεκινά κοντά σ’ ένα σταθερό σημείο, παραμένει στη γειτονιά του σημείου, τότε το σταθερό σημείο είναι <u>ευσταθές</u>
2. Ένα σταθερό σημείο είναι <u>ασυμπτωτικά ευσταθές</u>, αν είναι ευσταθές (σύμφωνα με το (1) και, επίσης, αν κάθε τροχιά, που ξεκινά κοντά στο σταθερό σημείο, πλησιάζει το σταθερό σημείο καθώς $t \longrightarrow \infty$ (π.χ. στη λογιστική δ. εξ. το σταθερό σημείο $x_* = a$, είναι ασυμπτωτικά ευσταθές)
3. Αν στη γειτονιά ενός σταθερού σημείου, η δ. εξ. έχει θετική κλίση, τότε το σταθερό σημείο είναι <u>ασταθές</u>
4. Αν στη γειτονιά ενός σταθερού σημείου, η δ. εξ. έχει αρνητική κλίση, τότε το σταθερό σημείο είναι <u>ευσταθές</u>
5. Αν υπάρχει μόνο ένα σταθερό σημείο στο δυναμικό σύστημα, τότε αυτό θα είναι <u>ολικά ευσταθές</u> ή <u>ολικά ασταθές</u>

<u>Ολικά ευσταθές</u>: αν για κάθε αρχική τιμή (όχι η τιμή του σταθερού σημείου) το σύστημα συγκλίνει στο σταθερό σημείο

<u>Ολικά ασταθές</u>: αν για κάθε αρχική τιμή (όχι η τιμή του σταθερού σημείου), το σύστημα αποκλίνει από το σταθερό σημείο

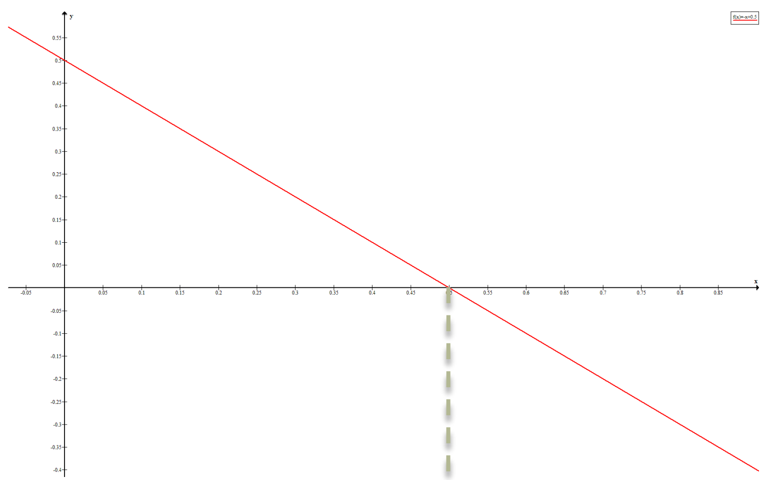
Παράδειγμα

Έστω το υπόδειγμα προσφοράς – ζήτησης:

$$\begin{cases} q_d = a + bp \ , \ b < 0 \\ q_s = c + dp \ , d > 0 \\ \dfrac{dp}{dt} = k \cdot (q_d - q_s) \ , k > 0 \end{cases}$$

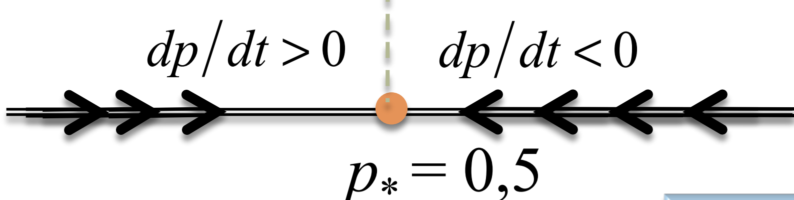
Και ας θέσουμε (*για χάρη του παραδείγματος*): $a = 0{,}8$, b = -0,5 , c = 0,3 , d = 0,5 & $k = 1$

Τότε η δ. εξ. γράφεται: $\dfrac{dp}{dt} = -p + 0{,}5$



Άρα: <u>ολικά ευσταθές σταθερό σημείο</u>

Σύμφωνα με τον ορισμό (4) και αφού η κλίση στο p_* είναι αρνητική...



Άρα: ολικά ευσταθές ή ασταθές;

Άρα στο $p_* = 0{,}5$: **ελκυστής**

Και μάλιστα το <u>μόνο</u> σταθερό σημείο!

Ασκήσεις

1. Να μελετηθεί το υπόδειγμα:

$$\begin{cases} q_d = a + bp + f\dfrac{dp}{dt} \;,\; b<0\,,\, f\neq 0 \\ q_s = c + dp \;,\, d>0 \\ \dfrac{dp}{dt} = k\cdot\left(q_d - q_s\right) \;,\, k>0 \end{cases}$$

Θεωρείστε ότι οι σταθερές k, a, b, c, d έχουν τις τιμές του προηγούμενου παραδείγματος. Ποιο ρόλο παίζει η f;

2. Να μελετηθεί η δ. εξ. του Malthus. Να διακρίνετε περιπτώσεις ως προς την σταθερά k ($k>0$ ή $k<0$)

3. Να μελετηθεί το μοντέλο ανάπτυξης Harrod – Domar. Να διακρίνετε περιπτώσεις ως προς το λόγο s/v του Harrod.

… και ο 6ος ορισμός!

6. Αν ένα δυναμικό σύστημα έχει περισσότερα από ένα σταθερά σημεία, τότε δεν μπορούμε να μιλάμε για ολική ευστάθεια ή αστάθεια, αλλά μιλάμε για <u>τοπική ευστάθεια</u> ή <u>τοπική</u> <u>αστάθεια</u>.

Παράδειγμα

Στο μοντέλο του Solow με συνάρτηση παραγωγής Cobb – Douglas, η δ. εξ. ήταν:

$$\frac{dk}{dt}+(n+\delta)\cdot k=s\cdot r\cdot k^{a}$$

$$k_{1*}=0$$

$$k_{2*}=\left(\frac{sr}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-a}}$$

Σταθερά σημεία

$$\frac{dk}{dt}=-(n+\delta)\cdot k+s\cdot r\cdot k^{a}$$

, και θέσω: $a=0{,}25$, $s=0{,}1$, $n=0{,}03$, $\delta=0{,}4$, & $r=4$

$$\frac{dk}{dt}=-0{,}43k+0{,}4k^{0{,}25}$$

$$k_{1*}=0$$

Τοπικά ασταθές

$$k_{2*}=0{,}90807569$$

Τοπικά ευσταθές

Επαληθεύσατε με τη βοήθεια του:

Γραμμικές ομογενείς διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

Γενική μορφή: $\begin{cases} a\cdot\dfrac{d^2y}{dt^2}+b\cdot\dfrac{dy}{dt}+c\cdot y=0 \quad (1) \\ a\cdot y''(t)+b\cdot y'(t)+c\cdot y(t)=0 \end{cases}$

<u>Ερώτημα</u>: Μπορούμε να βρούμε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2;

<u>Απάντηση</u>: Ναι (συνήθως)… Και τότε η γενική λύση θα είναι: $y=c_1y_1+c_2y_2$

Μεθοδολογία:

Έστω: $y=e^{xt} \quad (2)$

Αντικαθιστώντας την (2) στην (1): $ax^2e^{xt}+bxe^{xt}+ce^{xt}=0 \Rightarrow e^{xt}\cdot(ax^2+bx+c)=0$

Δηλ. η: $y=e^{xt}$ θα είναι λύση $\Leftrightarrow \boxed{ax^2+bx+c=0 \quad (3)}$

Χαρακτηριστική εξίσωση

Η (3), ως γνωστό, έχει:

Περίπτωση 1η :

Αν: $b^2 - 4ac > 0$ → Δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = r$ & $x_2 = s$

Άρα η γενική λύση θα είναι:

$$y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{st}$$

, όπου c_1 , c_2 : σταθερές

Αν, επιπλέον, είχαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y(0) = y_0 \quad , y'(0) = y'_0$$

ΠΡΟΣΟΧΗ!
2 αρχικές συνθήκες

Τότε: $y(0) = c_1 e^{r\cdot 0} + c_2 e^{s\cdot 0} = c_1 + c_2 \Rightarrow y_0 = c_1 + c_2 \quad (4)$

και $y'(t) = rc_1 e^{rt} + sc_2 e^{st} \Rightarrow y'(0) = rc_1 e^{r\cdot 0} + sc_2 e^{s\cdot 0} = rc_1 + sc_2 \Rightarrow y'_0 = rc_1 + sc_2 \quad (5)$

Το σύστημα των (4) & (5) δίνει:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{y'_0 - s\cdot y_0}{r - s} \\ c_2 = \dfrac{y'_0 - r\cdot y_0}{s - r} \end{cases}$$

Και άρα η ειδική λύση της δ. εξ.:

$$y(t) = \square \cdot e^{rt} + \square \cdot e^{st}$$

Περίπτωση 2η :

Αν: $b^2 - 4ac = 0$ → Διπλή πραγματική ρίζα $x_1 = x_2 = r$

Άρα η γενική λύση θα είναι: $y(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$, όπου c_1 , c_2 : σταθερές

Προσοχή στον όρο

Αν, επιπλέον, είχαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y(0) = y_0 \quad , y'(0) = y'_0$$

Τότε: $y(0) = c_1 e^{r\cdot 0} + c_2 \cdot 0 \cdot e^{r\cdot 0} = c_1 \Rightarrow y_0 = c_1$

και $y'(t) = rc_1 e^{rt} + rc_2 t e^{rt} + c_2 e^{rt} \Rightarrow y'(0) = rc_1 e^{r\cdot 0} + rc_2 \cdot 0 \cdot e^{r\cdot 0} + c_2 e^{r\cdot 0}$

$\Rightarrow y'_0 = rc_1 + c_2$

Άρα: $\begin{cases} c_1 = y_0 \\ c_2 = y'_0 - ry_0 \end{cases}$

Η ειδική λύση της δ. εξ.: $y(t) = \boxed{} \cdot e^{rt} + \boxed{} \cdot t e^{rt}$

Περίπτωση 3η :

Αν: $b^2 - 4ac < 0$ → Δύο μιγαδικές (συζυγείς) ρίζες: $\begin{cases} x_1 = r = \alpha + i\beta \\ x_2 = s = \alpha - i\beta \end{cases}$

Ή (σε τριγωνομετρική μορφή): $\begin{cases} x_1 = r = e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t \\ x_2 = s = e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t \end{cases}$

Άρα η γενική λύση θα είναι:

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t + c_2 e^{\alpha t} \cdot \sin\beta t$$

, όπου c_1 , c_2 : σταθερές

Αν, επιπλέον, είχαμε να επιλύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (Π.Α.Τ.):

$$y(0) = y_0 \quad , y'(0) = y_0'$$

Τότε: $y(0) = c_1 e^{\alpha \cdot 0} \cdot \cos(\beta \cdot 0) + c_2 e^{\alpha \cdot 0} \cdot \sin(\beta \cdot 0) = c_1$

και $y'(t) = (\alpha c_1 + \beta c_2) e^{\alpha t} \cos\beta t + (\alpha c_2 - \beta c_1) e^{\alpha t} \sin\beta t$

$$\Rightarrow y'(0) = (\alpha c_1 + \beta c_2) e^{\alpha 0} \cos(\beta \cdot 0) + (\alpha c_2 - \beta c_1) e^{\alpha 0} \sin(\beta \cdot 0) \Rightarrow y'(0) = \alpha c_1 + \beta c_2$$

Άρα: $\begin{cases} c_1 = y_0 \\ c_2 = \dfrac{y_0' - \alpha \cdot y_0}{\beta} \end{cases}$

Η ειδική λύση της δ. εξ.: $y(t) = \boxed{} \cdot e^{\alpha t} \cos\beta t + \boxed{} \cdot e^{\alpha t} \sin\beta t$

Παράδειγμα 1ο

Να λυθεί η δ. εξ.: $$\frac{d^2 y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} - 5y = 0$$

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση της δ. εξ. είναι: $x^2 + 4x - 5 = 0$ $\begin{cases} x_1 = -5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

Άρα η γενική λύση: $$y(t) = c_1 e^{-5t} + c_2 e^{t}$$

Αν είχαμε να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών: $y(0) = 0 \ , y'(0) = 1$

Τότε *(μετά από μερικές απλές αλγεβρικές πράξεις)*: $c_1 = -\frac{1}{6} \ , c_2 = \frac{1}{6}$

Και η ειδική λύση θα είναι:

$$y(t) = -\frac{1}{6} e^{-5t} + \frac{1}{6} e^{t}$$

Άσκηση:

Επαληθεύσατε με το:

Ασκήσεις:

1. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y''(t)+4y'(t)+4y(t)=0\,, \quad y(0)=3,\, y'(0)=7$$

Γενική λύση: $y(t)=c_1e^{-2t}+c_2te^{-2t}$, Ειδική λύση: $y(t)=3e^{-2t}+13te^{-2t}$

2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}+2y=0 \quad , \; y(0)=2,\, y'(0)=1$$

Γενική λύση: $y(t)=c_1e^{-t}\cos t+c_2e^{-t}\sin t$

Ειδική λύση: $y(t)=2e^{-t}\cos t+3e^{-t}\sin t$

3. Άσκηση:

Επαληθεύσατε τις (1) και (2) με το: