



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ**  
**ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**  
**ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ**

**ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - Γραμμικά Συστήματα**

**Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ**

1. Έστω  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 \\ 9 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & b & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  και  $U = \begin{pmatrix} c & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ .

Να βρεθούν τα στοιχεία  $a, b, c, k \in \mathbb{R}$  έτσι ώστε  $A = LU$  και χρησιμοποιώντας την παραπάνω παραγοντοποίηση να λύσετε το σύστημα  $Ax = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}^t$ .

2. Αν  $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , βρείτε έναν πίνακα  $X$  έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A^t X + A = I_3.$$

3. Δίνονται οι πίνακες  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$  και  $\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ .

- i) Να υπολογισθεί ο πίνακας  $\Gamma^{-1}$ , αν υπάρχει.
- ii) Να υπολογισθεί ο πίνακας  $X$ , ώστε  $\Gamma X + B = 2A$ .
- iii) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των οριζουσών, να υπολογίσετε τις ορίζουσες των πινάκων  $-5\Gamma$ ,  $2\Gamma^t$ ,  $\Gamma^{-t}$  και  $\Gamma^3$ .

4. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

- i) Να υπολογισθούν οι πίνακες  $A^{-1}$  και  $A^{-t}$ , αν υπάρχουν.

ii) Να βρεθεί ο πίνακας  $Y$ , τέτοιος ώστε  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

- iii) Να βρεθεί ο πίνακας  $Y^t Y$ . Τι παρατηρείτε;

5. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ . Να βρείτε

i) αν ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος και σε περίπτωση θετικής απάντησης να υπολογίσετε τον πίνακα  $A^{-1}$ .

ii) έναν πίνακα  $X$  έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$AXA^T + A^T A = 2I_3.$$

6. Χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις πράξεις γραμμών ή στηλών, υπολογίστε την ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 11 \\ 9 & 11 & 13 & 15 \\ a & b & c & d \\ 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

όπου  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές των  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  να λυθεί το σύστημα  $Ax = b$ , όπου  $b = (1 \ 2 \ -2 \ 4)^T$ .

7. Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων :

$$x + y + z = -1$$

$$x - ay + z = a$$

$$x + y + az = 1$$

i) Να λύσετε το σύστημα για όλες τις τιμές της παραμέτρου  $a \in \mathbb{R}$ .

ii) Για την τιμή  $a = 0$ , να βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $A$  των συντελεστών του συστήματος και να υπολογίσετε τη  $n$ -οστή δύναμη του  $A$ .

8. Για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων  $k, a \in \mathbb{R}$  να λυθεί το σύστημα :

$$(k-1)x + y = a$$

$$4x + (k-3)y + 2z = 2$$

$$-2y + (k-1)z = -a$$

Να δοθεί η μορφή των λύσεων, όπου υπάρχουν.

9. Να υπολογίσετε την τιμή του  $k \in \mathbb{R}$ , έτσι ώστε το σύστημα

$$x + 2y - 4z = 4$$

$$3x - y + 13z = 2$$

$$4x + y + k^2 z = k + 3$$

να έχει μοναδική λύση, η οποία να υπολογισθεί.

10. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} kx + 4y + 6z = 0 \\ x + ky + 3z = 0 \\ -x - 2y + (k-5)z = a-1 \end{cases}.$$

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές των  $k, a$  να λυθεί το παραπάνω σύστημα ώστε να έχει: i) μοναδική λύση, ii) άπειρες λύσεις, iii) καμία λύση και στη συνέχεια να βρεθούν οι μορφές των λύσεων όπου αυτές υπάρχουν.

11. Να λυθεί το σύστημα :

$$(k-1)x_1 + (k-1)x_2 = 1-k$$

$$x_1 + kx_2 + kx_3 = k-1$$

$$(k^2 - k)x_1 + (k^2 - k)x_3 = 0$$

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά σας, δώστε τις λύσεις όταν  $k=3$ .

12. Να βρεθούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για τα  $a, b, c, k \in \mathbb{R}$  ώστε το σύστημα

$$x - y - 3z + 2w = a$$

$$3y - 12z + bw = 2$$

$$2x - 3y - 2z + w = c$$

$$3x - y - 12z + kw = 4$$

να έχει άπειρες λύσεις. Στη συνέχεια για τις τιμές των  $a, b, c, k$  που υπολογίστηκαν, να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος.