



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ
ΣΤΗ ΒΙΟΙΑΤΡΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ – Γραμμικές απεικονίσεις

Διδάσκουσα : Δρ. Μ. Αδάμ

1. Να εξετάσετε ποιες από τις επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικές:

i) $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $f_1(x, y, z) = (2x + 3y + 2, x - 2y - 3z)$

ii) $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $f_2(x, y, z) = (2, x + y, x + 4y - z)$

iii) $f_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $f_3(x, y, z) = (3x + 4y, 2xy - 5yz, x - y - z)$

iv) $f_4 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $f_4(x, y) = (0, x - 3y, x + y)$

v) $f_5 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, με

$$f_5(x, y, z, w) = (2x - y + w, -x + z + w, -x + 2y + 3z - w, -3x + 2y + 5z + w)$$

2. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέτοια ώστε, $f(2, 1) = (1, 2, 1)$ και $f(1, 1) = (-1, 0, 1)$. Να βρεθεί ο τύπος της απεικόνισης $f(x, y)$.

3. Να βρεθεί μία γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, τέτοια ώστε, $\text{Im } f = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, όπου $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$ και $\mathbf{v}_2 = (1, 2, 3)$.

4. Έστω η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$f(x, y, z) = (x + 2y + z, y, 2x + y + 2z).$$

i) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση f είναι γραμμική.

ii) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της απεικόνισης f καθώς και η διάσταση της βάσης.

iii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\text{Im } f$ και η διάσταση της βάσης.

iv) Να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .

v) Είναι η f ισομορφισμός;

5. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με

$$f(x, y, z) = (-2x, 2x - y + 2z, 3x + 2y - z).$$

i) Να βρεθεί μία βάση του πυρήνα $\ker f$ της απεικόνισης f καθώς και η διάσταση της βάσης.

- ii) Να βρεθεί μία βάση της εικόνας $\text{Im } f$ και η διάσταση της βάσης.
- iii) Να βρεθεί ο πίνακας αναπαράστασης της f ως προς την κανονική βάση του \mathbb{R}^3 .
- iv) Αν η f είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση, να βρεθεί η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} .
6. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $f(x, y) = (2x + 3y, ax + 6y)$.
- i) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι αντιστρέψιμη.
- ii) Για τις τιμές που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (i), να βρεθεί η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .
7. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, με $f(x, y) = (ax + 8y, 8x + 4y)$, όπου $a \in \mathbb{R}$.
- i) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f είναι ισομορφισμός.
- ii) Για τις τιμές που υπολογίστηκαν στο ερώτημα (i), να βρεθεί η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} .
8. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με
- $$f(x, y, z) = (x + y - z, x - ay, x + y + az), \text{ όπου } a \in \mathbb{R}.$$
- Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $a \in \mathbb{R}$ να υπολογισθούν οι διαστάσεις $\dim \text{Im } f$ και $\dim \ker f$.
9. Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, με $f(x, y, z) = (2y + z, x - 4y, 3x)$ και τα σύνολα $S_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ είναι η κανονική βάση του \mathbb{R}^3 , και $S_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.
- i) Να εξετασθεί, αν το σύνολο S_2 αποτελεί μία βάση του \mathbb{R}^3 .
- ii) Να υπολογισθούν οι πίνακες αναπαράστασης $(f)_{S_1}$, $(f)_{S_2}$, $(f)_{S_1, S_2}$ και $(f)_{S_2, S_1}$.
- iii) Να εξετασθεί, αν οι πίνακες $(f)_{S_1}$, $(f)_{S_2}$ είναι όμοιοι και να γραφεί ο πίνακας ομοιότητάς τους.
10. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

και μία γραμμική απεικόνιση $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, με $f(X) = XA$.

- i) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της απεικόνισης f .
- ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης f .

11. Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ και η απεικόνιση $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, με $f(X) = AX - XA$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γραμμική.
- ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της απεικόνισης f .
- iii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης f .

12. Έστω η απεικόνιση $f : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$, με $f(X) = X + X^t$.

- i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γραμμική.
 - ii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση του πυρήνα της απεικόνισης f .
 - iii) Να βρείτε μία βάση και τη διάσταση της εικόνας της απεικόνισης f .
- υπολογίστηκαν, να βρεθούν οι λύσεις του συστήματος.