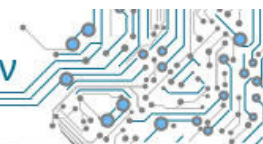




ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Γεράσιμος Ποταμιάνος

*Αναπλ. Καθηγητής,
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών
και Μηχανικών Υπολογιστών*

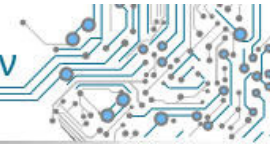
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

<http://www.inf.uth.gr/~gpotamianos>



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών



ΘΕΩΡΙΑ ΣΗΜΑΤΩΝ & ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Ενότητα 10: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Z

10.0. Εισαγωγή

10.1. $M/\Sigma Z$ – Ορισμός / Παραδείγματα

10.2. Περιοχή Σύγκλισης $M/\Sigma Z$

10.3. Αντίστροφος $M/\Sigma Z$

10.4. Ιδιότητες $M/\Sigma Z$

10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με $M/\Sigma Z$

10.6. Διαγρ. Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου

10.7. Μονόπλευρος $M/\Sigma Z$



10.0. Εισαγωγή

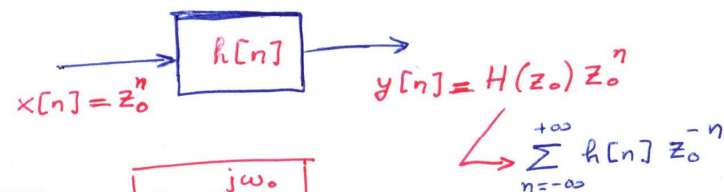
- Αποτελεί γενίκευση του μ/σ Fourier διακριτού χρόνου.
- Προσφέρει επιπλέον εργαλεία για ανάλυση σημάτων και Γ.Χ.Α. συστημάτων διακριτού χρόνου.
- Επιπλέον επιτρέπει ανάλυση πολλών Γ.Χ.Α. συστημάτων που είναι ασταθή – και για τα οποία ο μ/σ Fourier διακριτού χρόνου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί.
- Υπάρχουν δύο μορφές του μ/σ Z:
 - ✓ Δίπλευρος (double-sided)
 - ✓ Μονόπλευρος (one-sided)
- Θα επικεντρωθούμε κυρίως στον πρώτο.
- Θα ακολουθήσουμε παρόμοια προσέγγιση με το Κεφ. 9 (μ/σ Laplace).
- Υπάρχουν ομοιότητες αλλά και σημαντικές διαφορές με μ/σ Laplace.





10.1. Μ/Σ Z – Ορισμός

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ:



ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $z_0 = e^{j\omega_0}$

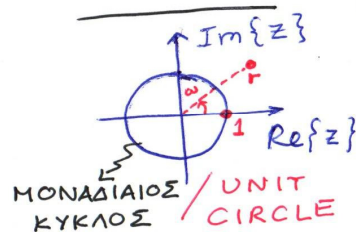
ΟΡΙΣΜΟΣ
Μ/Σ Z:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

↪ ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z)$$

ΣΧΕΣΗ ΜΕ
DTFT:



ΕΙΔΙΚΑ ΓΙΑ

$$\rightarrow r=1 \Leftrightarrow |z|=1 \text{ ΕΧΟΥΜΕ}$$

$$X(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]\}$$

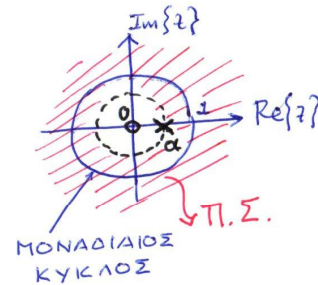




10.1. Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (I)

$$\bullet \quad x[n] = a^n u[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$



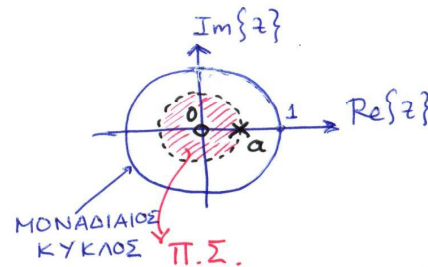
Πρέπει βέβαια: $|a z^{-1}| < 1 \Leftrightarrow$ ROC: $|z| > |a|$
Π.Σ.: $|z| > |a|$

ΠΟΛΟΙ: $\{a\}$
(POLES)
ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0\}$
(ZEROS)

$$\bullet \quad x[n] = -a^n u[-n-1] \Rightarrow X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[-n-1] z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} (a^{-1} z)^n =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z}, \text{ για } |a^{-1} z| < 1$$



$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

ROC:
 $|z| < |a|$

Πόλοι, μηδενικά όπως πιο πάνω.

ΑΡΑ: Δύο διαφορετικές ακολουθίες έχουν ίδια αλγεβρική έκφραση
ως μ/σ Ζ, αλλά με διαφορετικές Π.Σ.





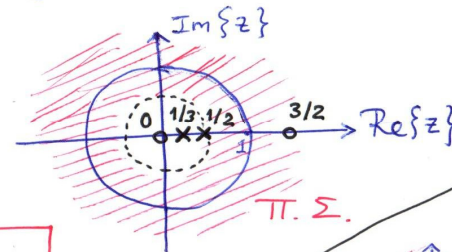
10.1. Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (II)

$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad x[n] = 7\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] - 6\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \Rightarrow \\
 & \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \dots = \frac{7}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} - \frac{6}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} = \\
 & = \frac{1 - \frac{3}{2} z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{3} z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{z(z - \frac{3}{2})}{(z - \frac{1}{3})(z - \frac{1}{2})} \quad \text{ROC: } |z| > 1/2
 \end{aligned}$$

ΤΟΜΗ

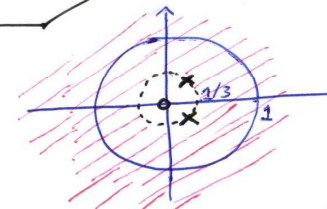
$$\text{ΠΟΛΟΙ: } \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{ΜΗΔΕΝΙΚΑ: } \left\{ 0, \frac{3}{2} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 & \bullet \quad x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right) u[n] = \\
 & = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{j\pi/4}\right)^n u[n] - \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{3} e^{-j\pi/4}\right)^n u[n]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow X(z) &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{3} e^{j\pi/4}) z^{-1}} - \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{1}{3} e^{-j\pi/4}) z^{-1}} \\
 &= \frac{(1/3 e^{j\pi/4}) z}{(z - 1/3 e^{j\pi/4})(z - 1/3 e^{-j\pi/4})}
 \end{aligned}$$



$$\text{ΠΟΛΟΙ: } \left\{ \frac{1}{3} e^{\pm j\pi/4} \right\}$$

$$\text{ΜΗΔΕΝΙΚΑ: } \{ 0, \infty \}$$

$$\text{ROC: } |z| > 1/3$$





10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (I)

Η περιοχή σύγκλισης του μ/σ Ζ
ΙΔΙΟΤΗΤΑ (1): αποτελείται από ΔΑΚΤΥΛΙΟ (RING)
με κέντρο το 0.

ΓΙΑΤΙ: Το αν το: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| r^{-n} < \infty$ εξαρτάται από το r
Κατά συνέπεια η σύγκλιση εξαρτάται μόνο από το $|z|$

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (2): Η περιοχή σύγκλισης του μ/σ Ζ
δεν περιλαμβάνει πόλους

ΓΙΑΤΙ: Προφανές Το $X(z)$ απειρίζεται σε πόλους.





10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (II)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ③: Αν το $x[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας τότε η Π. Σ. είναι όλο το επίπεδο των z εκτός πιθανώς του $z=0$ ή/και $z=\infty$

ΓΙΑΤΙ:
$$X(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n}$$

Αθροισμα πεπερασμένων όρων $\Rightarrow$ συγκλίνει παντού
εκτός αν $z^{-n} = \infty$ για κάποια n

- $N_1 < 0$: $z=\infty$ εκτός ROC
- $N_2 > 0$: $z=0$ εκτός ROC

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$x[n] = \delta[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$ ΣΥΓΚΛΙΝΕΙ ΠΑΝΤΟΥ

$x[n] = \delta[n-1] \Rightarrow X(z) = z^{-1}$ ΠΑΝΤΟΥ ΕΚΤΟΣ $z=0$ $\rightarrow$ ΠΟΛΟΣ

$x[n] = \delta[n+1] \Rightarrow X(z) = z$ ΠΑΝΤΟΥ ΕΚΤΟΣ $z=\infty$



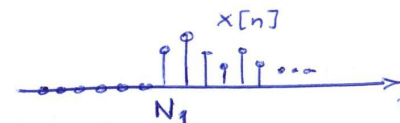


10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (III)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ (4): Αν η $x[n]$ είναι "ΔΕΞΙΑ" ορισμένη
 Αν ο κύκλος $|z| = r_0 \in \Pi. \Sigma.$ } $\Rightarrow |z| > r_0$
 ΕΠΙΣΗΣ
 ΣΤΗΝ
 $\Pi. \Sigma.$

ΓΙΑΤΙ: $|x[n]| r_0^{-n}$ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ $\Rightarrow |x[n]| r_1^{-n}$ ΕΠΙΣΗΣ
 $r_1 > r_0$ ΑΘΡΟΙΣΙΜΗ
 ($r_1^{-n} < r_0^{-n}$ για $n > 0$)

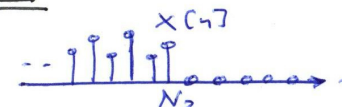
ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $N_1 < 0$ το ∞ ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ $\Pi. \Sigma.$



ΙΔΙΟΤΗΤΑ (5): Αν η $x[n]$ είναι "ΑΡΙΣΤΕΡΑ" ορισμένη
 Αν ο κύκλος $|z| = r_0 \in \Pi. \Sigma.$ } $\Rightarrow 0 < |z| < r_0$
 ΕΠΙΣΗΣ
 ΣΤΗΝ
 $\Pi. \Sigma.$

ΓΙΑΤΙ: Παρόμοια με παραπάνω

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $N_2 > 0$ το 0 ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ $\Pi. \Sigma.$





10.2. Περιοχή Σύγκλισης M/Σ Z (IV)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ⑥: Αν η $x[n]$ είναι ΔΙΠΛΕΥΡΗ
Αν ο κύκλος $|z|=r_0 \in \Pi. \Sigma.$ } $\Rightarrow$ Η $\Pi. \Sigma.$
θα είναι
δακτύλιος
που περιήλθ.
βάνει το
 $|z|=r_0$

ΓΙΑΤΙ: Η διπλευρη ακολουθία μπορεί να
γραφεί ως άθροισμα ΔΕΞΙΑΣ + ΑΡΙΣΤΕΡΗΣ
Η $\Pi. \Sigma.$ θα είναι η τομή των δύο $\Pi. \Sigma.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (πεπερασμένης διάρκειας ακολουθία):

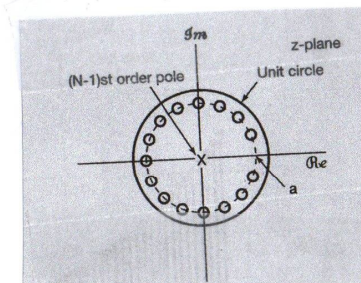
$$x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}, \quad (a > 0)$$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{a^n z^{-n}}_{(a z^{-1})^n} = \frac{1 - (a z^{-1})^N}{1 - a z^{-1}} = \frac{1}{z^{N-1}} \frac{z^N - a^N}{z - a}$$

$\Pi. \Sigma.$: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ①

$$\text{ZEROS: } \{ a e^{j \frac{2\pi k}{N}}, k=1, \dots, N-1 \}$$

$$\text{POLES: } \{ 0, \text{①} \text{ ΤΑΞΗΣ } \}$$



Σχ. 10.9 από βιβλίο
Oppenheim-Willsky





10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Z (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ (διπλευρη ακολουθία)

$$x[n] = b^{|n|}, \quad b > 0$$

$$= b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$\frac{1}{1-bz^{-1}}, \quad |z| > b$$

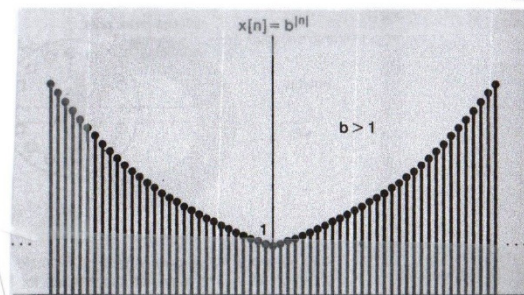
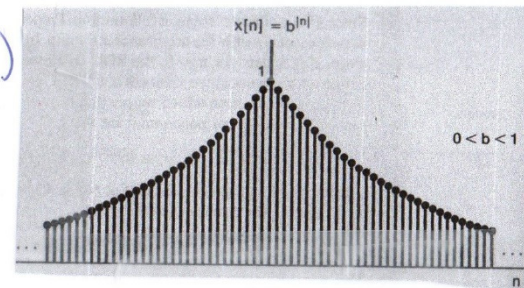
$$\frac{-1}{1-b^{-1}z^{-1}}, \quad |z| < \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-bz^{-1}} - \frac{1}{1-b^{-1}z^{-1}}$$

$$= \frac{b^2-1}{b} \frac{z}{(z-b)(z-b^{-1})}$$

$$\text{ΠΟΛΟΙ: } \{b, 1/b\}$$

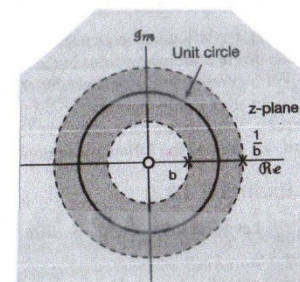
$$\text{ΜΗΔΕΝΙΚΑ: } \{0, \infty\}$$



Σχ. 10.10 από βιβλίο Oppenheim-Willsky

$$\text{για } b < |z| < 1/b$$

↳ ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΟΝΟ ΓΙΑ $0 < b < 1$



Σχ. 10.11(e) από βιβλίο
Oppenheim-Willsky





10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (VI)

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ⑦ :

Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση
τότε η Π. Σ. περιορίζεται από
πόλους ή επεκτείνεται στο ∞

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ⑧ :

Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση } $\Rightarrow$ Π. Σ. "ΕΚΤΟΣ"
Αν $x[n]$ είναι "ΔΕΞΙΑ" ακολουθία } ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΠΟΛΟΥ

ΕΠΙΣΗΣ :

Αν $x[n]$ είναι ΑΙΤΙΑΤΗ $\Rightarrow$ Π. Σ. ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ
ΤΟ ∞

ΙΔΙΟΤΗΤΑ ⑨ :

Αν $X(z)$ είναι ρητή συνάρτηση } $\Rightarrow$ Π. Σ. "ΕΝΤΟΣ"
Αν $x[n]$ είναι "ΑΡΙΣΤΕΡΗ" ακολουθία } ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΠΟΛΟΥ

ΕΠΙΣΗΣ :

Αν $x[n]$ είναι ΑΝΤΙ-ΑΙΤΙΑΤΗ $\Rightarrow$ Π. Σ. ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ
ΤΟ 0





10.2. Περιοχή Σύγκλισης Μ/Σ Ζ (VII)

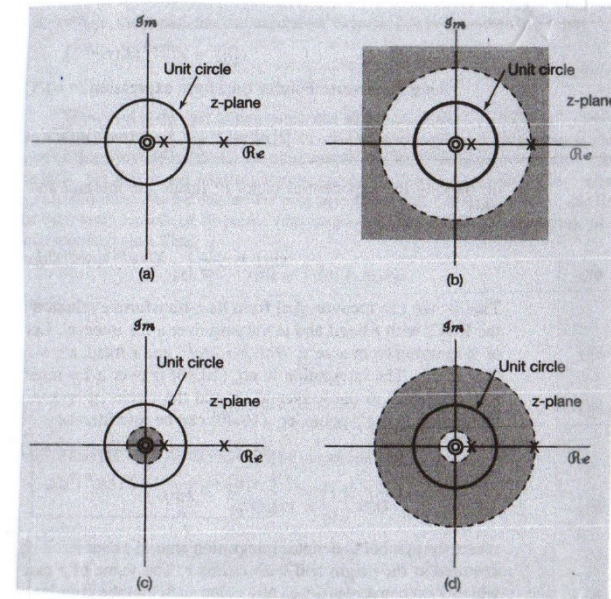
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ :

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1 - 2z^{-1}\right)}$$

ΠΟΛΟΙ: $\left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 0\}$

3 πιθανές Π. Σ. $\longrightarrow$



Σχ. 10.12 από βιβλίο Oppenheim-Willsky





10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Ζ – Ορισμός

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: $X(re^{j\omega}) = \text{DTFT}\{x[n]r^{-n}\} \quad (\text{για } re^{j\omega} \in \text{ROC})$

$\xRightarrow{\text{IDTFT}} x[n]r^{-n} = \text{DTFT}^{-1}\{X(re^{j\omega})\}$

$$\Rightarrow x[n] = r^n \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} X(re^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_{2\pi} X(re^{j\omega}) (re^{j\omega})^n d\omega$$

$\omega \rightarrow z$
 $\Rightarrow$
 $dz = jz d\omega$
(r σταθερό)

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

→ κυκλικό, αριστερόστροφο ολοκλήρωμα σε $|z|=r \in \text{ROC}$

ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ: Ανάπτυξη σε μερικά κλάσματα

ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΑ: Ανάπτυξη σε δυναμοσειρά

$$X(z) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{1 - \alpha_i z^{-1}}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:
(απλές ρίζες, ... κτλ...)

z^{-1}

$A_i \alpha_i^n u[n] \quad -A_i \alpha_i^n u[-n-1]$





10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (I)

$$X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})}, \quad |z| > \frac{1}{3} \quad \text{ROC}$$

Ανάλυση
σε
Μερικά
Κλάσματα

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

ROC

$$|z| < \frac{1}{4} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad |z| < \frac{1}{3} \quad |z| > \frac{1}{3}$$

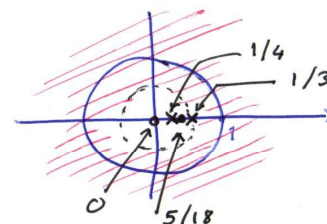
ΣΥΝΕΠΕΙΣ
ΜΕ ΕΚΦΩΝΗΣΗ

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

"ΔΕΞΙΕΣ", ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

ΠΟΛΟΙ: $\{1/4, 1/3\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 5/18\}$





10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (II)

• $X(z)$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ
ΑΛΛΑ ΜΕ ROC: $1/4 < |z| < 1/3$

$$X(z) = \frac{1}{1 - 1/4 z^{-1}} + \frac{2}{1 - 1/3 z^{-1}}$$

ROC
 $|z| < 1/4$ $|z| > 1/4$ $|z| < 1/3$ $|z| > 1/3$

ΣΥΝΕΠΕΙΣ
ΜΕ ΕΚΦΩΝΗΣΗ

$$\Rightarrow x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$$

"ΔΕΞΙΑ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ "ΑΡΙΣΤΕΡΗ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ

• $X(z)$ ΟΠΩΣ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΣ
ΑΛΛΑ ΜΕ ROC: $|z| < 1/4$

$$\Rightarrow x[n] = -(1/4)^n u[-n-1] - 2(1/3)^n u[-n-1]$$

"ΑΡΙΣΤΕΡΕΣ" ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ





10.3. Αντίστροφος Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα (III)

$$X(z) = 4z^2 + 2 + 3z^{-1} \quad \text{ROC: } 0 < |z| < \infty$$

Με απλή επισκόπηση

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$x[n] = \begin{cases} 4, & n = -2 \\ 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x[n] = 4\delta[n+2] + 2\delta[n] + 3\delta[n-1]$$

$$X(z) = \log(1 + az^{-1}) \quad \text{ROC: } |z| > |a|$$

Από σειρά Taylor: $\log(1+v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} v^n}{n}, \quad |v| < 1$

$$\Rightarrow X(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} a^n z^{-n}}{n}$$

$$\Rightarrow x[n] = (-1)^{n+1} \frac{a^n}{n} u[n-1]$$

$$= - \frac{(-a)^n}{n} u[n-1]$$





10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (I)

1 ΓΡΑΜΜΙΚΟΤΗΤΑ
LINEARITY

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z), \text{ π.σ.} = \mathbb{R}_1 \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z), \text{ π.σ.} = \mathbb{R}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a x_1[n] + \beta x_2[n] \xleftrightarrow{Z} a X_1(z) + \beta X_2(z)$$

π.σ. περιέχει το $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $a^n u[n] - a^n u[n-1] = \delta[n] \xleftrightarrow{Z} 1$ ROC: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

$\swarrow$ $\nwarrow$
 ROC: $|z| > |a|$ $|z| > |a|$
 $\boxed{1/(1-az^{-1})}$ $\boxed{az^{-1}/(1-az^{-1})}$

2 ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ
TIME SHIFTING

$$\left. \begin{aligned} x[n] &\xleftrightarrow{Z} X(z) \\ \text{π.σ.} &: \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x[n-n_0] \xleftrightarrow{Z} z^{-n_0} X(z)$$

π.σ.: $\mathbb{R}$ με πιθανή
πρόσδεση/αφαίρεση
των $0, \infty$

ΓΙΑΤΙ: Για $n_0 > 0$ το z^{-n_0} εισάγει **πόλο** στο 0 (μπορεί φυσικά να απλοποιηθεί ίσως με κάποιο μηδενικό στο 0 του $X(z)$)
 Για $n_0 < 0$ το z^{-n_0} εισάγει **μηδενικό** στο 0
 (που μπορούν να απαλειφθούν ίσως κάποιο αντίστοιχο πόλο στο 0 του $X(z)$.)





10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (II)

3 ΚΛΙΜΑΚΩΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ Ζ
SCALING IN THE Z-DOMAIN

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow z_0^n x[n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{z}{z_0}\right), \text{ π.σ.: } |z_0| \mathbb{R}$$

Ανλαδή: $z \in \text{ROC}_{\text{του } X(z)} \Rightarrow |z_0|z \in \text{ROC}_{\text{του } X(z/z_0)}$

ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ του $X(z)$ $\Rightarrow$ ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ του $X(z/z_0)$ $\Rightarrow z_0 a$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $z_0 = e^{j\omega_0}$ ΤΟΤΕ: $|z_0| \mathbb{R} = \mathbb{R}$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{Z} X(e^{-j\omega_0} z)$$

“ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ” ΤΩΝ ΠΟΛΩΝ / ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑ ω_0

4 ΧΡΟΝΙΚΗ ΑΝΑΚΛΑΣΗ
TIME REVERSAL

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x[-n] \xleftrightarrow{Z} X\left(\frac{1}{z}\right), \text{ π.σ.: } 1/\mathbb{R}$$

Ανλαδή:

$$z_0 \in \text{ROC}_{\text{του } X(z)} \Rightarrow 1/z_0 \in \text{ROC}_{\text{του } X(1/z)}$$





10.4. Ιδιότητες M/Σ Z (III)

5 ΧΡΟΝΙΚΗ ΕΠΕΚΤΑΣΗ
TIME EXPANSION

$$X_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{η πολ/σος του } k \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R} \Rightarrow x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{Z} X(z^k), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}^{1/k}$$

Δηλαδή: $z_0 \in \text{ROC}_{\text{τω}} X(z) \Rightarrow z_0^{1/k} \in \text{ROC}_{\text{τω}} X(z^k)$

α) $\text{ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ}_{\text{τω}} X(z) \Rightarrow a^{1/k} \text{ ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ}_{\text{τω}} X(z^k)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \Rightarrow X(z^k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-nk}$

6 ΣΥΖΥΓΙΑ
CONJUGATION

$$x^*[n] \xleftrightarrow{Z} X^*(z^*), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}$$

$m=nk \rightarrow \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m/k] z^{-m}$

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΗΔΕΝΙΚΩΝ ΟΡΩΝ $\downarrow$

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[m] z^{-m} \quad (\text{ΟΛΑ ΤΑ } m)$$

ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: $x[n]$ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΣΗΜΑ $\Rightarrow X(z) = X^*(z^*)$, δηλαδή ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΣΤΟ (z_0) $\Rightarrow$ ΠΟΛΟΣ ή ΜΗΔΕΝΙΚΟ ΣΤΟ (z_0^*)





10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (IV)

7 ΣΥΝΕΛΙΞΗ
CONVOLUTION

$$\left. \begin{aligned} x_1[n] &\xleftrightarrow{Z} X_1(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}_1 \\ x_2[n] &\xleftrightarrow{Z} X_2(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{Z} X_1(z) X_2(z)$$

π.σ.: περιλαμβάνει
το $\mathbb{R}_1 \cap \mathbb{R}_2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

• $h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \xleftrightarrow{Z} H(z) = 1 - z^{-1}$ ΠΟΛΟΙ: $\{0\}$
ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{1\}$
π.σ.: ΟΛΟ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ
ΕΚΤΟΣ ΑΠΟ ΤΟ $\odot$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΦΟΡΑΣ

Άρα: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R} \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = x[n] - x[n-1]$

$\xleftrightarrow{Z} (1 - z^{-1}) X(z)$

με π.σ. το $\mathbb{R}$, με πιθανή αφαίρεση του 0
 ή με πιθανή πρόσθεση του 1

• $h[n] = u[n] \xleftrightarrow{Z} H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$, π.σ.: $|z| > 1$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΘΡΟΙΣΤΗ

Άρα: $x[n] \xleftrightarrow{Z} X(z), \text{ π.σ.: } \mathbb{R} \Rightarrow y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

$\xleftrightarrow{Z} \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$ με π.σ. $\mathbb{R} \cap \{|z| > 1\}$





10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (V)

8 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΤΟ ΠΕΔΙΟ ΤΟΥ $\mathbb{Z}$
DIFFERENTIATION IN THE Z-DOMAIN

$$n x[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz}$$

με $\pi. \Sigma. \text{ την } \mathbb{R}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Απλή διαφύση του τύπου του μ/σ $\mathbb{Z}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

- $$X(z) = \log(1 + az^{-1}), \text{ με } \pi. \Sigma. |z| > |a| \Rightarrow x[n] = ?$$

$$n x[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} -z \frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{1 + az^{-1}}, \text{ με } \pi. \Sigma. |z| > |a| = a \cdot z^{-1} \cdot \frac{1}{1 - (-a)z^{-1}}$$

$$\Rightarrow n x[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1] \Rightarrow x[n] = \frac{-(-a)^n}{n} u[n-1]$$
- $$X(z) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}, \text{ με } \pi. \Sigma. |z| > |a| \Rightarrow x[n] = ?$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} \frac{1}{1 - az^{-1}}, |z| > |a| \Rightarrow \eta a^n u[n] \xleftrightarrow{\mathbb{Z}} -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$$

με $\pi. \Sigma. |z| > |a|$





10.4. Ιδιότητες Μ/Σ Ζ (VI)

9 ΘΕΩΡΗΜΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΤΙΜΗΣ
INITIAL VALUE THEOREM

$$x[n]=0, \forall n < 0 \Rightarrow x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: $x[n]=0, \forall n < 0 \Rightarrow X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^{-n} = \begin{cases} 1, & \text{για } n=0 \\ 0, & \text{για } n>0 \end{cases} \Rightarrow$$

ΣΥΝΕΠΕΙΑ ① Για αιτιατή ακολουθία $x[n]$, αν το $x[0]$ είναι πεπερασμένο τότε $\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ είναι πεπερασμένο

② Για ρητή $X(z)$, για αιτιατή $x[n]$, ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή δεν μπορεί να ξεπερνά αυτόν του παρονομαστή $\rightarrow$ (ως προς z)!

③ Χρήσιμη ιδιότητα για έλεγχο μ/σ. z





10.4. Ιδιότητες M/Σ Z (VII)

Δίπλευροι μετασχηματισμοί Z:

Ιδιότητες:

$$x[n - n_o] \leftrightarrow z^{-n_o} X(z)$$

$$z_o^n x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_o}\right)$$

$$x[-n] \leftrightarrow X(z^{-1})$$

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(z^*)$$

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

$$x[n] - x[n-1] \leftrightarrow (1 - z^{-1})X(z)$$

$$\sum_{k=-\infty}^n x[k] \leftrightarrow \frac{X(z)}{1 - z^{-1}}$$

$$n x[n] \leftrightarrow -z \frac{d}{dz} X(z)$$

Αιτιώτα $x[n]$: $x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Ζεύγη:

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

$$u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, |z| > 1$$

$$a^n u[n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| > |a|$$

$$n a^n u[n] \leftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{a z}{(z - a)^2}, |z| > |a|$$

$$n(n-1)\dots(n-k+1)a^n u[n] \leftrightarrow \frac{k! a^k z}{(z - a)^{k+1}}, |z| > |a|, k \geq 1$$

$$[a^n \cos(\omega_o n)] u[n] \leftrightarrow \frac{z^2 - a z \cos \omega_o}{z^2 - 2 a z \cos \omega_o + a^2}, |z| > |a|$$

$$[a^n \sin(\omega_o n)] u[n] \leftrightarrow \frac{a z \sin \omega_o}{z^2 - 2 a z \cos \omega_o + a^2}, |z| > |a|$$

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\delta[n - m] \leftrightarrow z^{-m}$$

$$-u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}, |z| < 1$$

$$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}, |z| < |a|$$

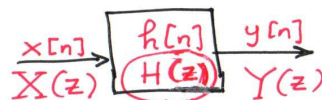
$$-n a^n u[-n-1] \leftrightarrow \frac{a z^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} = \frac{a z}{(z - a)^2}, |z| < |a|$$





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (I)

ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ



$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

↳ ΠΡΟΣΟΧΗ ΣΤΙΣ Π.Σ.

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ / SYSTEM FUNCTION
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ / TRANSFER FUNCTION

για $z = e^{j\omega}$

ΑΠΟΚΡΙΣΗ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ
SYSTEM FREQUENCY RESPONSE

↳ (αν ανήκει στην Π.Σ.)



$$H(z_0) z_0^n$$

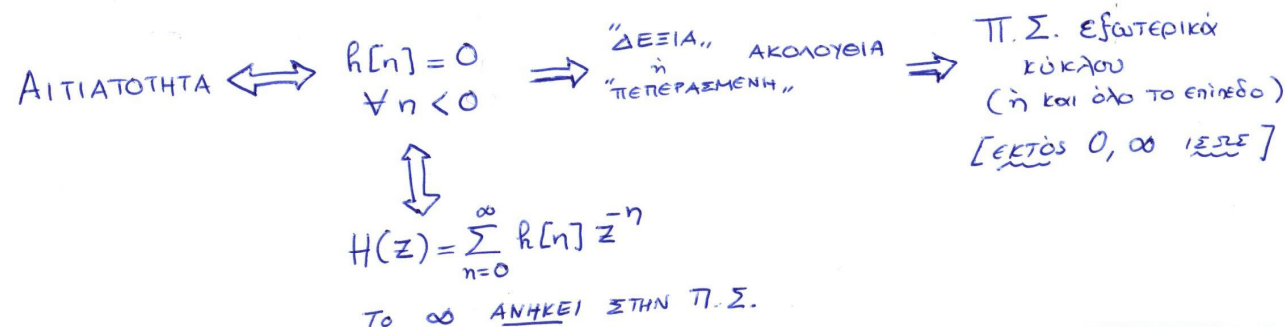
(αν το $z_0 \in \text{Π.Σ. του } H(z)$)





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (II)

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ: (causality)



ΑΡΑ:

ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ
ΧΡΟΝΟΥ ΕΙΝΑΙ ΑΙΤΙΑΤΟ



Η Π.Σ. ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ
ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ
ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΟΜΕΝΟΥ ΤΟΥ ∞

ΓΙΑ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $H(z)$:

ΕΝΑ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΜΕ ΡΗΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΝΑΙ
ΑΙΤΙΑΤΟ



Η Π.Σ. ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΕΙΝΑΙ ΣΤΟ
ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΤΟΥ ΚΥΚΛΟΥ
ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ
ΠΟΛΟΥ



Ο ΒΑΘΜΟΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ
ΑΡΙΘΜΗΤΗ (ως προς z) ΔΕΝ
ΞΕΠΕΡΝΑ ΑΥΤΟΝ ΤΟΥ
ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΗ (ως προς z)





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (III)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ :

• $H(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + z}{z^2 + \frac{1}{4}z + \frac{1}{8}} \Rightarrow$ ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ (?)

(ΟΧΙ), δεν μπορεί να είναι αιτιατό, γιατί ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή ξεπερνά αυτόν του παρονομαστή (ως προς z) $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = \infty \Rightarrow$ Το ∞ ΔΕΝ ΑΝΗΚΕΙ ΣΤΗΝ Π. Σ.

• $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}}, \quad |z| > 2$

Πολοί: $\{1/2, 2\}$ Π. Σ. ΕΚΤΟΣ ΤΟΥ ΠΙΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΠΟΛΟΥ

$H(z) = \frac{2 - \frac{5}{2}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})} = \frac{2z^2 - \frac{5}{2}z}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$ Βαθμός αριθμητή = Παρονομαστή

$\Rightarrow$ (ΝΑΙ), είναι αιτιατό.

Εναλλακτικά: $h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n \right] u[n]$
(από συνάρτηση μεταφοράς & Π. Σ.)

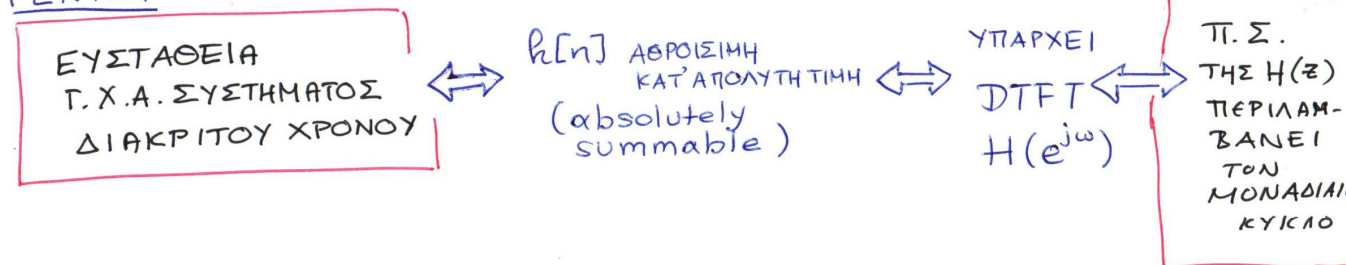




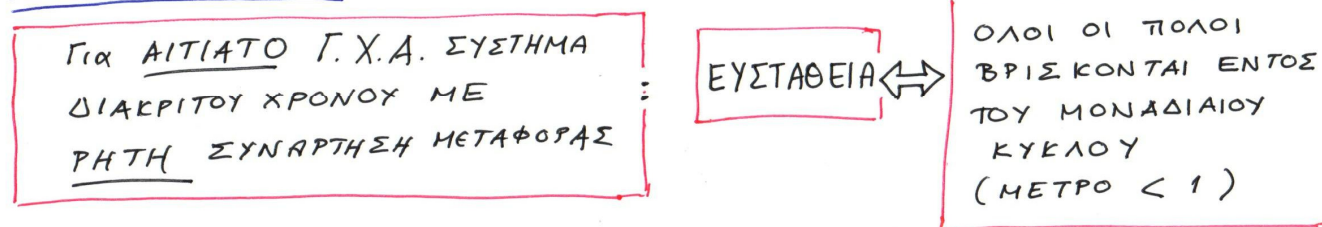
10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (IV)

ΕΥΣΤΑΘΕΙΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ: (Stability)

ΓΕΝΙΚΑ:



ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ:





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 2z^{-1}} \quad (*) \quad \text{ΠΟΛΟΙ: } \{1/2, 2\}$$

Αν Π.Σ. είναι η: $|z| > 2 \quad (*) \Rightarrow h[n] = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[n]$ ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΒΡΟΙΣΙΜΗ

ΔΕΝ ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Leftrightarrow$ ΑΣΤΑΘΕΣ

Αν η Π.Σ. είναι η: $\frac{1}{2} < |z| < 2 \quad (*) \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2^n u[-n-1]$

ΠΕΡΙΛΑΜΒΑΝΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Leftrightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΕΙΝΑΙ ΑΠΟΛΥΤΩΣ ΑΒΡΟΙΣΙΜΗ

Το σύστημα επίσης είναι ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ

Αν η Π.Σ. είναι η: $|z| < 1/2 \quad (*) \Rightarrow h[n] = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n\right] u[-n-1]$

ΑΣΤΑΘΕΣ

Επίσης, το σύστημα είναι ΜΗ ΑΙΤΙΑΤΟ





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (VI)

- $H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$ & ΑΙΤΙΑΤΟ

ΠΟΛΟΙ: $\{a\}$ } $\Rightarrow$ Π.Σ: $|z| > |a|$
ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ

ΕΥΣΤΑΘΕΣ
ΕΑΝ
 $|a| < 1$

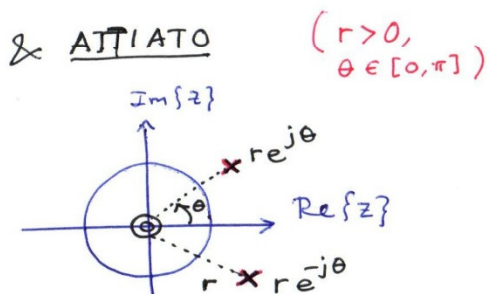
- $H(z) = \frac{1}{1 - (2r \cos \theta)z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ & ΑΙΤΙΑΤΟ

ΠΟΛΟΙ: $\{re^{\pm j\theta}\}$

ΜΗΔΕΝΙΚΑ: $\{0, 0\}$

ΑΙΤΙΑΤΟΤΗΤΑ $\rightarrow$ Π.Σ: $|z| > |r|$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ ΕΑΝ $|r| < 1$





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (VII)

Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ ΜΕ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΕΙΣΟΔΟΥ/ΕΞΟΔΟΥ
ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$\xRightarrow{\text{μ/σ } z} \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_{1k} z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$

$$\Rightarrow h[n] = \dots$$

↑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ
για Π.Σ. ή ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ





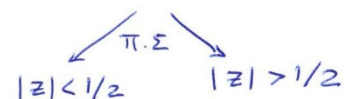
10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (VIII)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{3}x[n-1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1 + \frac{1}{3}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

ΠΟΛΟΙ: $\{1/2\}$



$$\underline{\pi\sigma}: |z| > 1/2 \Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

ΑΙΤΙΑΤΟ & ΕΥΣΤΑΘΕΣ

$$\underline{\pi\sigma}: |z| < 1/2 \Rightarrow h[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[-n]$$

ΑΝΤΙ-ΑΙΤΙΑΤΟ & ΑΣΤΑΘΕΣ





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (ΙΧ)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εστω Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΜΕ:

$$1. \quad x_1[n] = \left(\frac{1}{6}\right)^n u[n] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1[n] = \left[\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n + 10 \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] u[n]$$

↙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΣ

$$2. \quad x_2[n] = (-1)^n \Rightarrow y_2[n] = \frac{7}{4} (-1)^n$$

$$\Rightarrow H(z) = ?$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow \begin{cases} X_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} z^{-1}}, & |z| > 1/6 \\ Y_1(z) = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{10}{1 - \frac{1}{3} z^{-1}} \end{cases}$$

$$= \frac{(\alpha + 10) - (5 + \frac{\alpha}{2}) z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})}, \quad |z| > 1/2$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{Y_1(z)}{X_1(z)} = \frac{[(\alpha + 10) - (5 + \frac{\alpha}{2}) z^{-1}][1 - \frac{1}{6} z^{-1}]}{(1 - \frac{1}{2} z^{-1})(1 - \frac{1}{3} z^{-1})} \quad \textcircled{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = -9$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow z_0 = -1: x_2[n] = z_0^n, y_2[n] = H(z_0) z_0^n \Rightarrow H(-1) = \frac{7}{4}$$

↙ ∈ ROC

$$\Rightarrow H(z) = \dots = \frac{z^2 - 13/6 z + 1/3}{z^2 - 5/6 z + 1/6}$$

$$\text{ROC: } |z| > 1/2$$

ΕΥΣΤΑΘΕΣ & ΑΙΤΙΑΤΟ





10.5. Ανάλυση Γ.Χ.Α. Συστημάτων με Μ/Σ Ζ (X)

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

- ΓΧΑ σύστημα ΕΥΣΤΑΘΕΣ & ΑΙΤΙΑΤΟ
- Ρητή συνάρτηση Μεταφοράς $H(z)$
- $H(z)$ έχει ΠΟΛΟ στο $|z=1/2|$
- $H(z)$ έχει ΜΗΔΕΝΙΚΟ στον Μοναδιαίο κύκλο

• $\text{DTFT}\left\{\left(\frac{1}{z}\right)^n h[n]\right\}$ ΥΠΑΡΧΕΙ (?) $= H(z) \Big|_{z=2}$

• $H(e^{j\omega}) = 0$, για κάποιο ω

(ΝΑΙ) αφού $H(z)$ έχει μηδενικό για κάποιο $z=e^{j\omega}$

(ΝΑΙ) γιατί
το σύστημα είναι
αιτιατό & ευσταδές,
δηλαδή όλοι οι πόλοι
είναι εντός του μοναδιαίου
κύκλου!

• $h[n]$ είναι πεπερασμένης διάρκειας $\rightarrow$ (ΟΧΙ) αφού έχουμε πόλο του $H(z)$
στο $z=1/2$

• $n(h[n] * h[n])$ αντιστοιχεί σε ευσταδές σύστημα

$$\hookrightarrow G(z) = -z \frac{d}{dz} H^2(z) = -2z H(z) \frac{d}{dz} H(z)$$

ΠΟΛΟΙ παραμένουν στις ίδιες θέσεις, δηλ. εντός μοναδιαίου κύκλου

Π. Σ. ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΟΝ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟ ΚΥΚΛΟ $\Rightarrow$ ΕΥΣΤΑΘΕΣ





10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (I)

① ΣΥΝΔΕΣΜΟΛΟΓΙΕΣ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

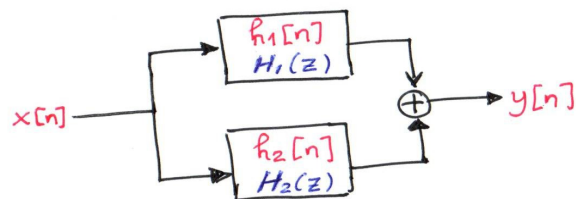
ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ



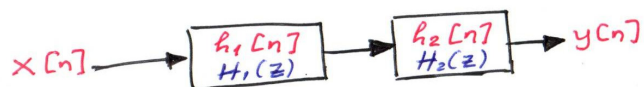
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$

• ΕΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩ [PARALLEL]



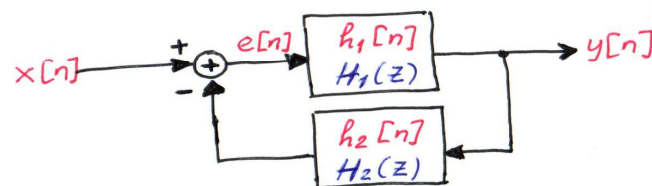
• ΕΝ ΣΕΙΡΑ [CASCADE]



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

$$H(z) = H_1(z) H_2(z)$$

• ΜΕ ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ [FEEDBACK]



$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z) H_2(z)}$$



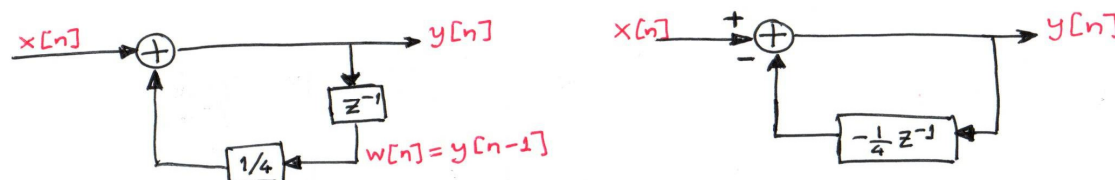


10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (II)

② ΑΙΤΙΑΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΟΜΕΝΑ
ΑΠΟ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ / ΡΗΤΕΣ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

- ΒΑΣΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΥΛΟΠΟΙΗΣΗΣ :
 - Άδροιση
 - Πολλαπλασιασμός με συντελεστή
 - Μοναδιαία καθυστέρηση (unit delay)

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : $H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$ ΡΗΤΗ
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ
- $y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = x[n]$ ΕΞΙΣΩΣΗ
ΔΙΑΦΟΡΩΝ

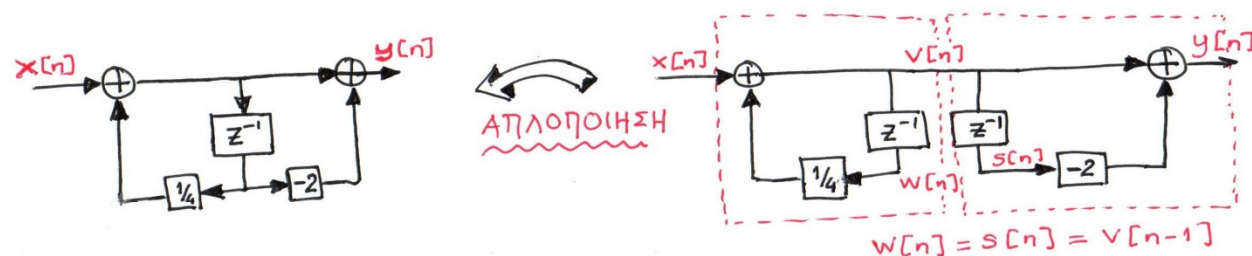




10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (III)

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

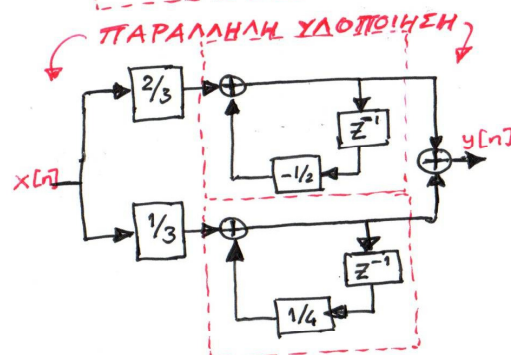
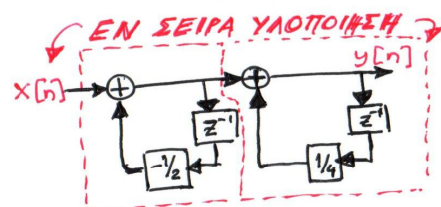
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}}_{\frac{V(z)}{X(z)}} \cdot \underbrace{(1 - 2z^{-1})}_{\frac{Y(z)}{V(z)}}$$





10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (IV)

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$

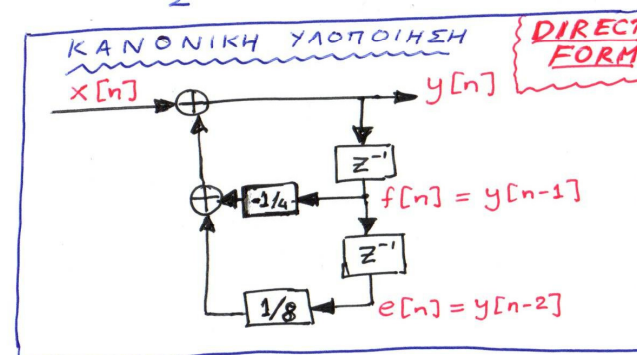


$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

(ΕΝ ΣΕΙΡΑ)
CASCADE

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

(ΠΑΡΑΛΛΗΛΗ)
PARALLEL



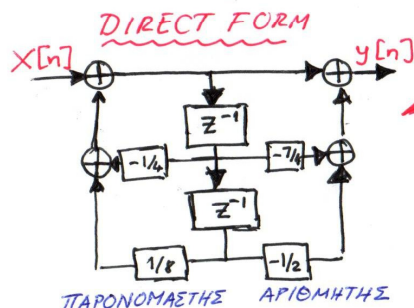
ΕΞΙΣΩΣΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ: $y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$





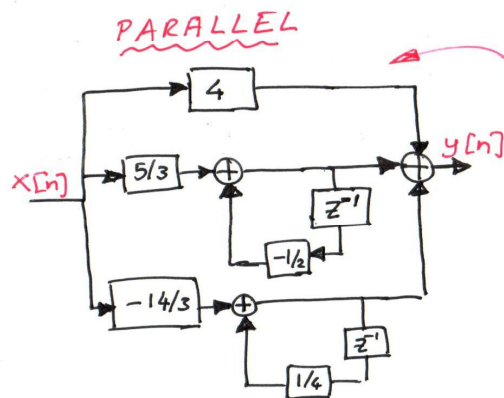
10.6. Διαγράμματα Υλοποίησης Γ.Χ.Α. Συστημάτων Διακριτού Χρόνου (V)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$

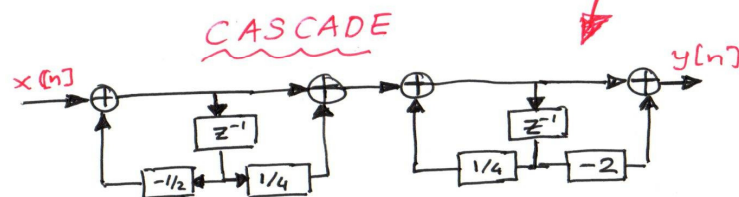


$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \cdot \left(1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}\right)$$

$$= \left(\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)$$



$$= 4 + \frac{5/3}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{14/3}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$





10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Z – Ορισμός

$$\mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ μ/σ Z

UNILATERAL Z-TRANSFORM

- $x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{U}Z} \mathcal{X}(z) = \mathcal{U}Z\{x[n]\}$
- $\mathcal{U}Z\{x[n]\} = Z\{x[n]u[n]\}$
- $\mathcal{U}Z\{x[n]\} = Z\{x[n]\}$, για ΑΙΤΙΑΤΑ σήματα.
($x[n]=0, n < 0$)
- ROC/Π.Σ. : Πάντα προς το εξωτερικό
κύκλου.





10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Ζ – Παραδείγματα

- $x[n] = a^n u[n]$

Αιτιατή ακολουθία $\Rightarrow \mathcal{U}\mathcal{Z}\{x[n]\} = \mathcal{Z}\{x[n]\}$

$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a|$$

- $x[n] = a^{n+1} u[n+1]$

δεν είναι αιτιατή ακολουθία,
περιμένουμε $\mathcal{U}\mathcal{Z}\{x[n]\} \neq \mathcal{Z}\{x[n]\}$

$$X(z) = \frac{z}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad \text{ΔΙΠΛΕΥΡΟΣ}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1} z^{-n} = \frac{a}{1 - az^{-1}}, \quad |z| > |a| \quad \text{ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ}$$

- $X(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})} \Rightarrow x[n] = ?$

ROC: $|z| > 1/3$

$$x[n] = \left(\frac{1}{4} \right)^n u[n] + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^n u[n], \quad \underline{n \geq 0}$$





10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Ζ – Ιδιότητες (I)

Μερικές ιδιότητες του ΔΙΠΛΕΥΡΟΥ μ/σ Ζ

- Διαφοροποιούνται στην περίπτωση του ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΥ μ/σ.

- ΣΥΝΕΛΙΞΗ:

Απαιτεί: $x_1[n] = x_2[n] = 0, \forall n < 0$

Τότε:
$$x_1[n] * x_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{U}\mathcal{Z}} X_1(z) \cdot X_2(z)$$

- ΧΡΟΝΙΚΗ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ (ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ):

$$x[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{U}\mathcal{Z}} z^{-1} X(z) + x[-1]$$

$$x[n-2] \xleftrightarrow{\mathcal{U}\mathcal{Z}} z^{-2} X(z) + x[-1] z^{-1} + x[-2]$$

.....

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

$$y[n] = x[n-1] \Rightarrow Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1] z^{-n} = x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1] z^{-n}$$

$$= x[-1] + \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1] z^{-(n-1)} z^{-1}$$

$$\stackrel{n'=n-1}{=} x[-1] + \left(\sum_{n'=0}^{\infty} x[n'] z^{-n'} \right) z^{-1} = x[-1] + z^{-1} X(z)$$





10.7. Μονόπλευρος Μ/Σ Ζ – Ιδιότητες (II)

- Η ΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΗ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΣΤΑΘΕΡΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ ΜΕ ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΕΣ ΑΡΧΙΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ.

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

ΑΙΤΙΑΤΟ Γ.Χ.Α. ΣΥΣΤΗΜΑ: $y[n] + 3y[n-1] = x[n]$ (*)

ΕΙΣΟΔΟΣ: $x[n] = au[n]$

ΜΗ ΜΗΔΕΝΙΚΗ ΑΡΧΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ: $y[-1] = \beta$

(*) $\Rightarrow y(z) + 3\beta + 3z^{-1}y(z) = \frac{a}{1-z^{-1}}$

$\Rightarrow y(z) = -\frac{3\beta}{1+3z^{-1}} + \frac{a}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})}$

$\mathcal{U}\mathcal{Z}$ of: $\underbrace{\text{ZERO INPUT RESPONSE}}_{\text{ZERO STATE RESPONSE}}$

$\Rightarrow$ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΣΕ ΜΕΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ $\mathcal{L}(u\mathcal{Z})^{-1}$

(πχ) με $\alpha=8$
 $\beta=1$ $y[n] = [3(-3)^n + 2]u[n], \quad n \geq 0$





10.7. Ιδιότητες Μονόπλευρου Μ/Σ Ζ (III)

Μονόπλευροι μετασχηματισμοί Ζ:

$$x[n] \leftrightarrow \mathcal{X}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Ιδιότητες:

Για αιτιατά $x[n]$: $\mathcal{X}(z) = X(z)$

Για αιτιατά $x_1[n], x_2[n]$: $x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow \mathcal{X}_1(z) \mathcal{X}_2(z)$

$x[n+1] \leftrightarrow z \mathcal{X}(z) - z x[0]$

$x[n-1] \leftrightarrow z^{-1} \mathcal{X}(z) + x[-1]$

$x[n-k] \leftrightarrow z^{-k} \mathcal{X}(z) + \sum_{m=0}^{k-1} z^{-m} x[m-k] \quad (\text{για } k > 0)$

