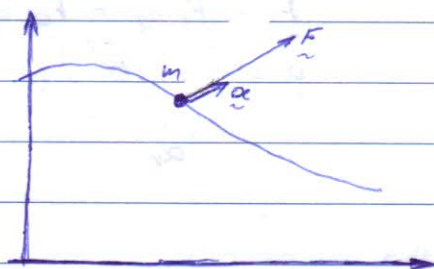


ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΥΛΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

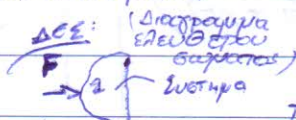


$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} \quad (2^{\text{ος}}) \quad \text{νόμος του Νευτωνα}$$

$$\hookrightarrow \underline{F}, \underline{a} \text{ ομογενεια}$$

1^{ος} νόμος : Αν $\underline{F} = 0$, τότε $\underline{v} = \text{σταθερή}$

3^{ος} νόμος : Δράση-αντίδραση

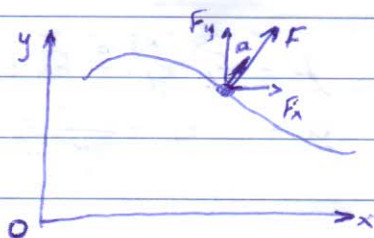


Δύναμη που ασκεί το (1) στο (2).

το άλλο σώμα ασκεί στο περιβάλλον

δύναμη στο (2) από το (1).

• Καρτεσιανό Σύστημα Συντεταγμένων



$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z$$

$$\underline{a} = a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z$$

$$\underline{F} = m \underline{a} \Rightarrow F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = m (a_x \underline{e}_x + a_y \underline{e}_y + a_z \underline{e}_z) \Rightarrow$$

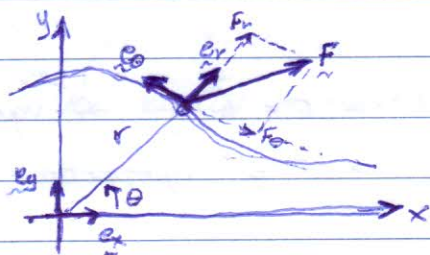
οι συντεταγμένες
θα είναι ίδιες
 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F_x &= m a_x \\ F_y &= m a_y \\ F_z &= m a_z \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} F_x &= m \ddot{x} \\ F_y &= m \ddot{y} \\ F_z &= m \ddot{z} \end{aligned}$$

- Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων (Κυλινδρικό)

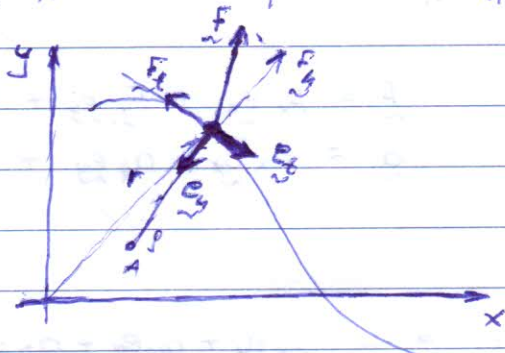


$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta (+ F_z \vec{e}_z) \\ \vec{a} &= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)}_{a_r} \vec{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{a_\theta} \vec{e}_\theta (+ \ddot{z} \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta = m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \\ (F_z = m\ddot{z}) \end{array} \right\} \text{ Εξισώσεις κίνησης}$$

- Τροχιακό Σύστημα Συντεταγμένων (στο επίπεδο)



$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_t \vec{e}_t + F_n \vec{e}_n \\ \vec{a} &= \ddot{s} \vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \vec{e}_n = \dot{v} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n \end{aligned}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow F_t \vec{e}_t + F_n \vec{e}_n = m\left[\ddot{s} \vec{e}_t + \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_t = m\ddot{s} \\ F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho} \end{array} \right\}$$

Λέω έχουμε πάλι για ΤΣΑ στο χώρο (επιπεδο επίπεδο).

Δεν φτάνουν οι εξισώσεις κίνησης (κινητικές).

- Αν μας δίνουν εξισώσεις για να υπολογίσουμε τους άγνωστους, τότε βρίσκουμε κι άλλες (κινηματικές) από τους κινηματικούς περιορισμούς.

(για $r = \text{σταθερό}$)

- Βήματα για λύση:

- Βήμα 1^ο: Επιλογή συστήματος - περιβάλλοντος

Διαγράμμα ελεύθερου σώματος (ΔΕΣ) - ^{δυνάμεις που ασκεί} ντάι στο σύστημα.

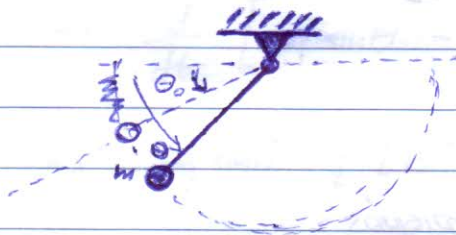
- Βήμα 2^ο: Επιλογή συστήματος αναφοράς

Εξισώσεις κίνησης

- Βήμα 3^ο: Κινηματικοί περιορισμοί (τόσοι, όσες και οι εξισώσεις που λείπουν).

- Βήμα 4^ο: Επίλυση (ζωμένες μυστικές μέθοδοι)

- Εφαρμογή - Θεωρία



Απαρτηρωτό - αβάρη καλώδιο.

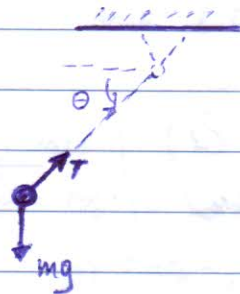
Α) - Δύναμη στο καλώδιο (συνάρτηση του θ)

Β) - Ταχύτητα συνάρτηση της θέσης.

Γ) - Σε ποια θέση θ_1 η T γίνεται μέγιστη και να βρεθεί αυτή η μέγιστη.

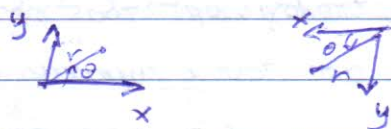
Α)-Β) Βήμα 1^ο: Επιλογή συστήματος - Περιβάλλον

Σύστημα: σώμα μάζας m . , Περιβάλλον: καλώδιο, στήριξη

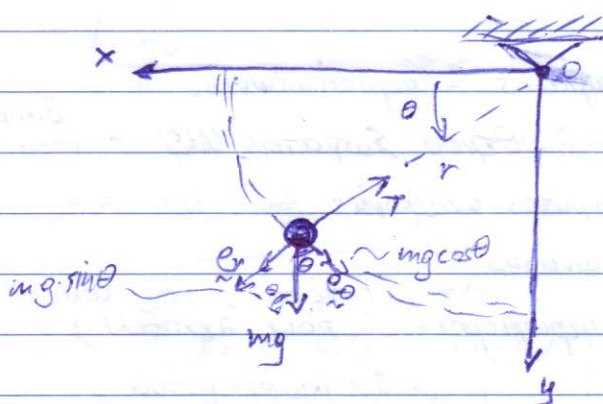


μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων

Βήμα 2ο : Επίδοξη Συστήματος :



Πολικό σύστημα συντεταγμένων :



Εξισώσεις κίνησης :

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \quad (2)$$

αν η T έχει αρνητική, τότε είναι αντίθετη απ' αυτή που έχω σχεδιάσει.

$$(1) \Rightarrow -T + mg \sin \theta = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$(2) \Rightarrow +mg \cos \theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

η T δεν έχει πρόσημο στην διεύθυνση της θ .

Άγνωστοι : $T, r, \theta \rightarrow \underline{3}$

Εξισώσεις : 2

Βήμα 3ο : Κινηματικός περιορισμός

$$r = L \quad (3)$$

Βήμα 4ο : Επίδοξη

$$r = L \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \ddot{r} = 0$$

$$(1) \Rightarrow -T + mg \sin \theta = -mL\dot{\theta}^2 \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow mg \cos \theta = mL\ddot{\theta} \quad (2)$$

2 εξισώσεις

2 άγνωστοι : T, θ

$$(1) \Rightarrow \boxed{T = mg \sin \theta + mL\ddot{\theta}^2} \quad \text{---} \quad \odot$$

Μαχικά ΔΕ $\rightarrow$ Εξίσωση Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας
(διαφορίως εξισώσεις) (Αν μηχανικές δυνάμεις δύν παραχούν έργο)

$$(2) \Rightarrow mg \cos \theta = mL\ddot{\theta} \rightarrow g \cos \theta = L\ddot{\theta} \rightarrow \\ \Rightarrow g\dot{\theta} \cos \theta = L\ddot{\theta}\dot{\theta}$$

$$\circ \quad \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} \rightarrow \dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt}$$

$$\circ \quad \frac{d}{dt}(\sin \theta) = \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\text{Αντικαθιστώντας:} \quad g \frac{d}{dt}[\sin \theta] = L \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow g \frac{d}{dt}[\sin \theta] - L \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \left[g \sin \theta - \frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 \right] = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow g \sin \theta - \frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 = C \quad (*) \quad (\text{σταθερά})$$

Αρχικές συνθήκες (ΔΕ): για $\theta = \theta_0$, η ταχύτητα $v = 0$.

$$\text{οπότε: } \underline{\underline{v = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta = L \dot{\theta} \underline{e}_\theta}}$$

$$\boxed{v = L \dot{\theta}} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{L}$$

Επομένως: $v = 0 \rightarrow \dot{\theta} = 0$ στη θέση $\theta = \theta_0$.

για $\theta = \theta_0$ η παραπάνω εξίσωση (*), πρνει τη μορφή:

$$g \sin \theta_0 - \frac{1}{2} L \dot{\theta}^2 = C \rightarrow \boxed{C = g \sin \theta_0}$$

Αντικατάσταση στην (3) :

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} (\sin\theta - \sin\theta_0)}$$

Αντικατάσταση στην (1) : $\Rightarrow T = mg \sin\theta + mL \frac{2g}{L} (\sin\theta - \sin\theta_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = 3mg \sin\theta - 2mg \sin\theta_0 \Rightarrow \boxed{T = mg \cdot (3\sin\theta - 2\sin\theta_0)}$$

Ταχύτητα :

$$v = L\dot{\theta} \Rightarrow v^2 = L^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \dot{v}^2 = 2g(\sin\theta - \sin\theta_0)$$

Γ) Αιφύπια για να βρούμε μέγιστο

$$\frac{dT}{d\theta} = 3mg \cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \begin{cases} \pi/2 \\ 3\pi/2 \end{cases}$$

$$\frac{d^2T}{d\theta^2} = -3mg \sin\theta$$

$$\left| \begin{array}{l} \text{Για } \theta = \frac{\pi}{2} : \frac{d^2T}{d\theta^2} = -3mg \sin\frac{\pi}{2} = -3mg < 0. \\ \text{Για } \theta = \frac{3\pi}{2} : \frac{d^2T}{d\theta^2} = -3mg \sin\frac{3\pi}{2} = 3mg > 0. \end{array} \right.$$

Από Μέγιστο
Από Ελάχιστο

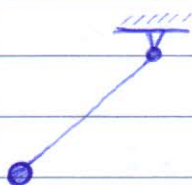
$$T_{\max} = T\left(\frac{\pi}{2}\right) = mg(3\sin\frac{\pi}{2} - 2\sin\theta_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{\max} = 3mg - 2mg \sin\theta_0$$

Ειδική περίπτωση $\theta_0 = 0$: $\boxed{T_{\max} = 3mg}$

την ίδια ο!

~ 19/10/2012 ~



$$T = mg(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0)$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{L} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

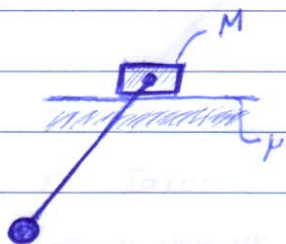
$$v^2 = L \dot{\theta}^2 = 2gL(\sin \theta - \sin \theta_0).$$

(xθ)

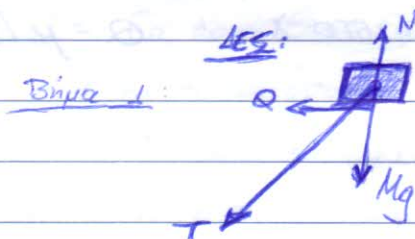
$$\alpha \ddot{\theta} = \beta \cos \theta \Rightarrow \ddot{\theta} \text{ (συνάρτηση της } \theta \text{)}$$

ΕΤΙΣ ΕΝΕ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΟ $\ddot{\theta}$ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ t .

Παράδειγμα - Εφαρμογή 2



Συνθήκες για να κινηθεί το σώμα μάζας M .



Βήμα 1:

ΛΕΣ:

Q, N : από το δάπεδο.
(στην επιφάνεια επαφής)



~ το θεωρούμε Ακόο σύστημα

1. Σώμα κινείται

$$Q = \mu N \rightarrow \text{κινηματικός περιορισμός}$$

— οριακή δύναμη τριβής

2. Σώμα παραμένει ακίνητο

$$Q \leq \mu N$$

$$x = 0 \rightarrow \text{κινηματικός περιορισμός}$$

$$\sum F_x = \sum F_y = 0$$

Δεν υπάρχει

$$Q > \mu N$$

Βήμα 2^ο: Εξισώσεις κίνησης (Καρτ. ΣΣ)

$$(1) F_x = ma_x \rightarrow Q - T \cos \theta = M \cdot a_x \quad (1)$$

$$(2) F_y = ma_y \rightarrow N - T \sin \theta - mg = M \cdot a_y \quad (2)$$

Αγνωστοί Q, a_x, a_y, N .

Βήμα 3^ο: Περιγραφή ~~Εξισώσεις~~ ^{Περιορισμοί} κίνησης.

$$\bullet y(t) = 0 \quad \forall t \rightarrow \dot{y} = \ddot{y} = 0 \quad (3)$$
$$\rightarrow a_y = \ddot{y} = 0.$$

$$\bullet \text{ Η } Q \text{ διασφαλίζει ότι το σώμα κινείται στο } X : Q = \mu N \quad (4)$$

Βήμα 4^ο:

$$(2) \xrightarrow{(3)} N - T \sin \theta - Mg = 0 \rightarrow N = T \sin \theta + Mg \quad *$$

$$(4) \rightarrow Q = \mu \cdot N \xrightarrow{(*)} Q = \mu (T \sin \theta + Mg) \rightarrow \text{Αχρηστοχρήτη την ορα}$$

~~στο οριο πριν~~

$$(\text{ στο οριο πριν παει να κινηθεί }) \rightarrow \ddot{x} = \ddot{X} = 0$$

$$\text{Στο οριο} \quad (1) \rightarrow Q = -T \cos \theta$$

$\rightarrow$ η Q είναι καθεώς, της αλληλεπιδράσεως.

$$(4) \rightarrow -T \cos \theta = \mu (T \sin \theta + Mg)$$

↑
↑
από την προηγούμενη σχέση
 $T = \frac{mg(3 \sin \theta - 2 \cos \theta)}{1}$

$$\rightarrow = mg(3\sin\theta - 2\sin\theta_0) \cos\theta = \mu \left[mg(3\sin\theta - 2\sin\theta_0) \sin\theta + Mg \right]$$

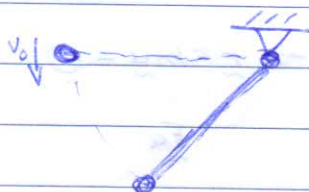
$$\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$$



$$\rightarrow (3\sin\theta - 2\sin\theta_0) \cos\theta = \mu \left[(3\sin\theta - 2\sin\theta_0) \sin\theta + \frac{M}{m} \right]$$

Λύση

ίδια με την προηγούμενη.



$$\theta_0 = 0$$

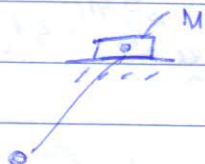
αρχικό μέτρο ταχύτητας v_0 .

Ερωτήματα :

1. Ταχύτητα συνάρτηση του θ .
2. Η δύναμη στο καλώδιο συνάρτηση του θ .
3. Για ποια θέση θ , το καλώδιο παύει να είναι τεντωμένο. ($T=0$)

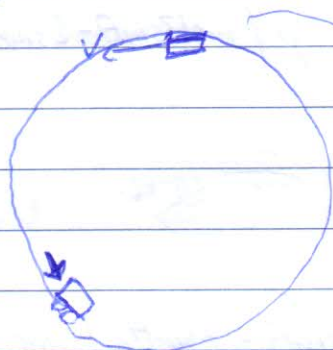
$T > 0 \Rightarrow$ (Τεντωμένο καλώδιο)

4. Ποια είναι η ελάχιστη αρχική v , που απαιτείται, για να εκτελέσει το ελεύθερο μια πλήρη περιστροφή ($T \geq 0$, συνεχώς) (ποια είναι η ταχύτητα στην κορυφή)



5. Για ποια θέση θ , το σώμα μάζας M , αρχίζει να κινείται.

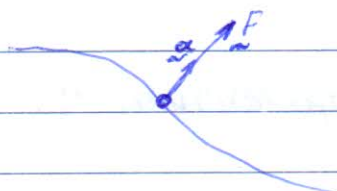
Θεωρία



Για να παραμείνει σε επαφή με τη στεφάνη:
θα πρέπει το έργο να δέχεται δύναμη από
τη στεφάνη (δύναμη απ' τη στεφάνη > 0)

Γ

Θεωρία



$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} \rightarrow \underline{F} - \underbrace{m \underline{a}}_{\underline{F}_a} = \underline{0}$$

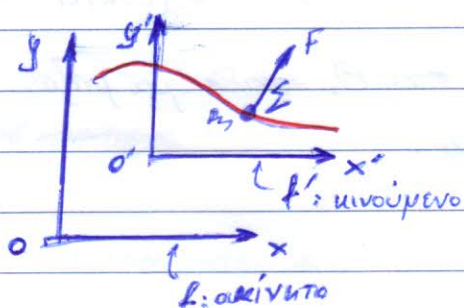
• Ορίζω την αδρανειακή δύναμη: $\underline{F}_a = -m \underline{a}$

Οπότε: $\underline{F} + \underline{F}_a = \underline{0}$

Αρχή του D'Alembert.

— Ο Νόμος του Νεύτωνα, ισχύει για ακίνητο Σ.Α.

Εφαρμογή του Νόμου του Νεύτωνα, για κινούμενο Σ.Α. (με $\underline{a}_0' = \underline{a}_f$)



$$\underline{F} = m \cdot \underline{a} \quad (1)$$

$$\underline{a}_{\Sigma/f} = \underline{a}_0' + \underline{a}_{\Sigma/f'} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \underline{F} = m \cdot (\underline{a}_0' + \underline{a}_{\Sigma/f'}) \Rightarrow \underbrace{\underline{F} - m \underline{a}_0'}_{\underline{F}_{total}} = m \underline{a}_{\Sigma/f'}$$

Αδρανειακή
Δύναμη.

$$\Rightarrow \underline{F}_{total} = m \cdot \underline{a}_{\Sigma/f'}$$

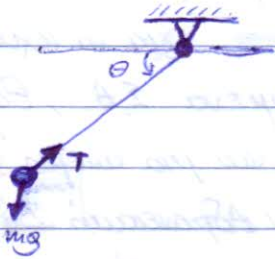
$$\underline{F}_{adp} = -m \underline{a}_0' = -m \underline{a}_f$$

$$\vec{F}_{total} = \vec{F} - m\vec{a}_H$$

L

Ενώ οι δυνάμεις για κάθε σύστημα αναφοράς είναι οι ίδιες, για να ισχύουν οι νόμοι για τα κινούμενα Σ.Α., θα πρέπει να προσθέσουμε και μια ακόμη υποθετική δύναμη, την αδρανειακή δύναμη.

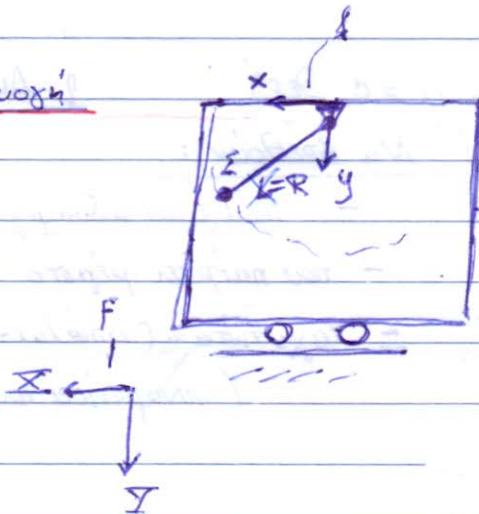
~ 23/10/2012 ~



$$mg \sin \theta - T = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

$$mg \cos \theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Εφαρμογή



• Να υπολογιστούν:

1] - Η δύναμη T (εξάρτηση του θ).

2] - Ποτέ η δύναμη T παίρνει τη μέγιστη τιμή της

3] - Την (απόλυτη) ταχύτητα της μάζας m (εξάρτηση του θ).

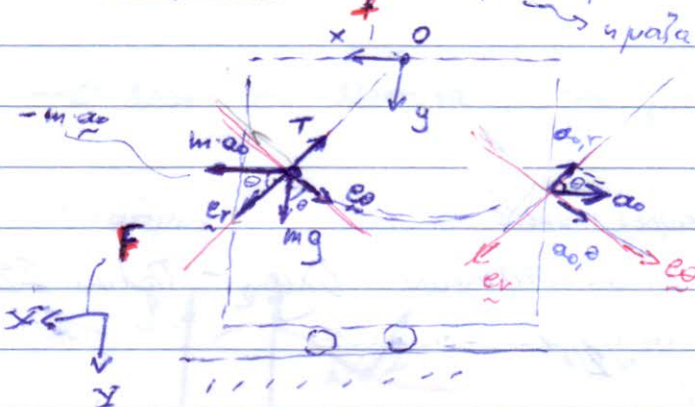
$$\underline{v}_{E/F} = \underline{v}_0 + \underline{v}_{E/P}$$

$$\underline{a}_{E/F} = \underline{a}_0 + \underline{a}_{E/P}$$

1]

Βήμα 1°

Σύστημα-Περιβάλλον



Βήμα 2°

Σ.Α. - Εξισώσεις κίνησης.

Α τριτος

Εξίσωση κίνησης ως προς συνιστώσα

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= m \ddot{x} \\ \sum F_y &= m \ddot{y} \end{aligned} \right\} \vec{F} = m \vec{a}$$

||
 $\vec{a}_{\Sigma/F}$

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{\Sigma/F}$$

$$\vec{F} = m(\vec{a}_0 + \vec{a}_{\Sigma/F})$$

$\nwarrow \nearrow$
 $F_r \quad F_\theta$

$$\vec{a}_{\Sigma/F} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

Επιλέχοντας πολικό σύστημα

$$F_r = m[\ddot{r} - r\dot{\theta}^2]$$

$$F_\theta = m[2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}]$$

$$mg \sin \theta - T = m(\ddot{r} \cos \theta + \dot{r} \dot{\theta}^2)$$

Επιλέξω ως κίνηση του οχήματος

$$mg \cos \theta = m(\ddot{r} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

(Η με κορδέλιανό σύστημα αναφοράς)

Θεωρία

$$\vec{F} = m \vec{a}_{\Sigma/F}$$

$$\vec{a}_{\Sigma/F} = \vec{a}_{F/F} + \vec{a}_{\Sigma/F}$$

$$\vec{F} = m(\vec{a}_{F/F} + \vec{a}_{\Sigma/F}) \rightarrow \vec{F} - m \vec{a}_{F/F} = m \vec{a}_{\Sigma/F}$$

Αβραμική - Υποθετική Δύναμη

Β' τρόπος Εξισώσεις κίνησης ως προς κεντρικό σύστημα Οxy.
 Σύστημα Αναφοράς (ΣΑ): Πολικό.

$$a_{s/r} = a_0. \quad (\text{προσθέτουμε μια δύναμη } -ma_0 \text{ στο σχήμα})$$

$$F_r = m(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2) \Rightarrow mg \sin \theta - T + ma_0 \cos \theta = m(\ddot{r} + r\dot{\theta}^2).$$

$$F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \Rightarrow mg \cos \theta - ma_0 \sin \theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$$

(δίνει το ίδιο).

Βήμα 3° $r = R = \text{σταθερό} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0.$

Βήμα 4° (1) $\Rightarrow T = -mg \sin \theta + ma_0 \cos \theta + mR\dot{\theta}^2$

(2) $\Rightarrow mg \cos \theta - ma_0 \sin \theta = mR\ddot{\theta} \quad (\times \dot{\theta}).$

Συνεχίζω ... (H/W) $v = R\dot{\theta}$

(2) $\Rightarrow g \cos \theta - a_0 \sin \theta = R\ddot{\theta} \Rightarrow g \dot{\theta} \cos \theta - g \dot{\theta} \sin \theta = R\dot{\theta}\ddot{\theta}$

$$\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = 2\dot{\theta}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}$$

$$\frac{d(\cos \theta)}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d(\sin \theta)}{dt} = \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\text{Αρα (2)} \Rightarrow g \frac{d(\sin\theta)}{dt} + a_0 \frac{d(\cos\theta)}{dt} = R \cdot \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d[g \sin\theta + a_0 \cos\theta]}{dt} = \frac{d[\frac{1}{2} R \dot{\theta}^2]}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g \sin\theta + a_0 \cos\theta = \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + C. \quad (**)$$

Εξάγουμε $\underline{v} = \dot{r} \underline{e}_r + r \dot{\theta} \underline{e}_\theta \rightarrow \underline{v} = R \dot{\theta} \underline{e}_\theta$ (αποκλίση αιώμενη)

$$\text{Αρα } v = R \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{R}. \quad (*)$$

• Αρχικές Συνθήκες: Για $\theta = \theta_0, v = 0$

$$\Rightarrow \text{Αρα για } \theta = \theta_0, \dot{\theta} = 0$$

• Οπότε $(**) \Rightarrow g \sin\theta_0 + a_0 \cos\theta_0 = C$

• Αρα η $(*)$ γίνεται: $g \sin\theta + a_0 \cos\theta = \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 + g \sin\theta_0 + a_0 \cos\theta_0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} R \dot{\theta}^2 = g(\sin\theta - \sin\theta_0) + a_0(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

$$\Rightarrow R \dot{\theta}^2 = 2g(\sin\theta - \sin\theta_0) + 2a_0(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow T = -mg \sin\theta + m a_0 \cos\theta + 2mg \sin\theta - 2mg \sin\theta_0 + 2m a_0 \cos\theta - 2a_0 \cos\theta_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = mg(\sin\theta - 2\sin\theta_0) + m a_0 (3\cos\theta - 2\cos\theta_0)$$

2) $T \rightarrow \max \text{ atav } \frac{dT}{d\theta} = 0, \quad \frac{d^2T}{d\theta^2} < 0.$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{d(mg \sin \theta - 2mg \sin \theta_0 + 3ma_0 \cos \theta - 2ma_0 \cos \theta_0)}{d\theta} =$$

$$= mg \cos \theta - 3ma_0 \sin \theta = m(g \cos \theta - 3a_0 \sin \theta).$$

$$\frac{dT}{d\theta} = 0 \Rightarrow g \cos \theta = 3a_0 \sin \theta \Rightarrow \boxed{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{g}{3a_0}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{g}{3a_0}} \quad \begin{matrix} \nearrow \theta_1 \\ \searrow \theta_2 \end{matrix}$$

$$\frac{dT}{d\theta} = \frac{d(mg \cos \theta - 3ma_0 \sin \theta)}{d\theta} = -mg \sin \theta - 3ma_0 \cos \theta.$$

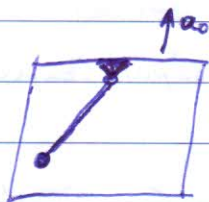
3) $v = R\dot{\theta} \rightarrow v^2 = R^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow v^2 = 2Rg(\sin \theta - \sin \theta_0) + 2Ra_0(\cos \theta - \cos \theta_0)$$

$$\Rightarrow |v| = \sqrt{v^2}.$$

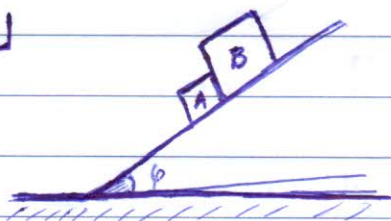
H/W

Να επαναλυθεί η προηγούμενη, για την περίπτωση:



Η ροπή αναχεται σε μια που έχει γίνει

Εφαρμογή



Σωμα Α m_A, μ_A

Σωμα Β m_B, μ_B

- Πόσο μεγάλη πρέπει να είναι η φ για να κινούνται τα σώματα προς τα κάτω; [H/W]
- Αν θεωρήσουμε ότι η φ είναι αρκετά μεγάλη. Να βρούμε:
 1. Μεταξύ τους δυνάμεις
 2. Επιταχύνση του Α και Β.
 3. Ταχύτητες, θέσεις
 4. Δυνάμεις τριβής
 5. Συνθήκη για την οποία χάνεται η επαφή μεταξύ των σωμάτων.
 6. Συνθήκες για τις οποίες τα σώματα παραμένουν συνενωμένα στο κεκλιμένο επίπεδο. (Οι εξισώσεις έχουν - οι κινηματικές περιορισμοί αλληλίας)

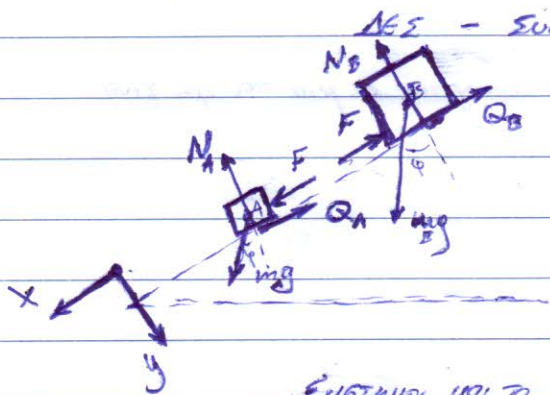
Μπορούμε να κάνουμε 3 διαγράμματα, αλλά ^{οποια} 2 από αυτά θα μας δώσουν τις 4 γραμμικά ανεξάρτητες εξισώσεις, το άλλο θα μας δώσει εξισώσεις γραμμικά εξαρτημένες από τις άλλες

Βήμα 1°

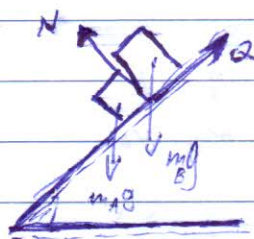
Συστήματα - Περιβάλλοντα

ΚΕΣ - Σύστημα (το Α-Β)

* τα σώματα θεωρούνται υλικά σημεία



Ευθύγραμμοι και τα 2 σώματα μαζί.



Βήμα 2°

Εξισώσεις κίνησης, ΚΕΣ

Σώμα Α:

$$F_x = m_A a_x \Rightarrow m_A g \sin \varphi - Q_A + F = m_A \ddot{x}_A \quad (1)$$

$$F_y = m_A a_y \Rightarrow m_A g \cos \varphi - N_A = m_A \ddot{y}_A \quad (2)$$

Συμπερα (μπορούμε να βάλουμε τα ίδια)

Σώμα Β:

$$F_x = m_B a_x \Rightarrow m_B g \sin \varphi - Q_B - F = m_B \ddot{x}_B$$

$$F_y = m_B a_y \Rightarrow m_B g \cos \varphi - N_B = m_B \ddot{y}_B$$

4 εξισώσεις

Αγνωστοί: $Q_A, F, \ddot{x}_A, N_A, \ddot{y}_A, Q_B, \ddot{x}_B, N_B, \ddot{y}_B$ (9 άγνωστοι)

Βήμα 3°

(κινηματικές περιορισμοί)

$$y_A = c \Rightarrow \dot{y}_A = 0 \Rightarrow \ddot{y}_A = 0 \quad (5)$$

$$y_B = c \Rightarrow \dot{y}_B = 0 \Rightarrow \ddot{y}_B = 0 \quad (6)$$

$$x_A = x_B \Rightarrow \ddot{x}_A = \ddot{x}_B = \ddot{x} \quad (7)$$

↪ επιβλίνονται σε ένα φά.

Λόγω σχετικής κίνησης του σώματος Α & Β ως προς το κεκλιμένο επίπεδο στην επιφάνεια επαφής:

$$Q_A = \mu_A N_A \quad (2)$$

$$Q_B = \mu_B N_B \quad (3)$$

? $\rightarrow$ τα θεωρούμε ίσα με με την οριζική τριβή.

Βήμα 4°

$$(5), (6), (7) \Rightarrow (1) \rightarrow m_A g \sin \varphi - Q_A + F = m_A \ddot{x} \quad (5)$$

$$(2) \rightarrow -N_A + m_A g \cos \varphi = 0 \Rightarrow N_A = m_A g \cos \varphi \quad (6)$$

$$(3) \rightarrow m_B g \sin \varphi - Q_B - F = m_B \ddot{x} \quad (7)$$

$$(4) \rightarrow -N_B + m_B g \cos \varphi = 0 \Rightarrow N_B = m_B g \cos \varphi \quad (8)$$

$$(8) \rightarrow Q_A = \mu_A N_A \xrightarrow{(6)} Q_A = \mu_A m_A g \cos \varphi \quad (9)$$

$$(9) \rightarrow Q_B = \mu_B N_B \xrightarrow{(8)} Q_B = \mu_B m_B g \cos \varphi \quad (10)$$

$$(1), (8) \rightarrow m_A g \sin \varphi - \mu_A m_A g \cos \varphi + F = m_A \ddot{x} \quad (11)$$

$$(3), (9) \rightarrow m_B g \sin \varphi - \mu_B m_B g \cos \varphi - F = m_B \ddot{x} \quad (12)$$

} $\Rightarrow$

$\rightarrow$ Συστήρα 2 Εξισώσεων (11), (12), με 2 άγνωστους (F, $\ddot{x}$) [γραφημικό]

$$(11) + (12) \Rightarrow \ddot{x} = g \left[\sin \varphi - \frac{\mu_A m_A + \mu_B m_B \cos \varphi}{m_A + m_B} \right]$$

προσθετούμε κατά μέλη
(αφαιρούμε F).

$\uparrow$ επιταχυνση της βαρύτητας.

Αντικατάσταση της $\ddot{x}$ στην (11), προκύπτει η F:

$$F = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g (\mu_A - \mu_B) \cos \varphi.$$

από ολοκλήρωση

$$v_A = a_A \cdot t = \ddot{x}_A \cdot t = \dot{x}_A \cdot t$$

από ολοκλήρωση

$$x_A = \ddot{x} \frac{t^2}{2}$$

(σταθερά)

(σταθερά)

$$x_A = x_B$$

γιατί έχουμε οριζική επαφή

5] Για να χυθεί η σφαίρα :

$$F < 0 \Rightarrow$$

(στο $F=0$, έχουμε οριζική επαφή)

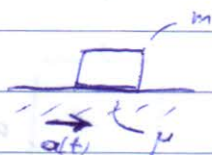
(και $F \leq 0$ να βάζουμε θα ήταν σωστό.)

$$\Rightarrow \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} g (\mu_A - \mu_B) \cdot \cos \varphi < 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_A - \mu_B < 0 \rightarrow \boxed{\mu_A < \mu_B}$$

23/10/2019

Εφαρμογή

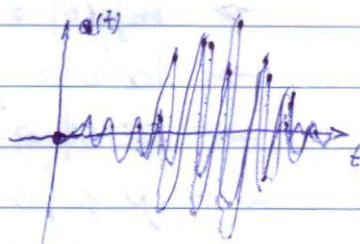


- Σεισμική δύναμη προκαλεί οριζόντια επιτάχυνση $a(t)$
- Συνθήκες για να μετακινηθεί το σώμα σχετικά με το δάπεδο. (σχέση μ, a)

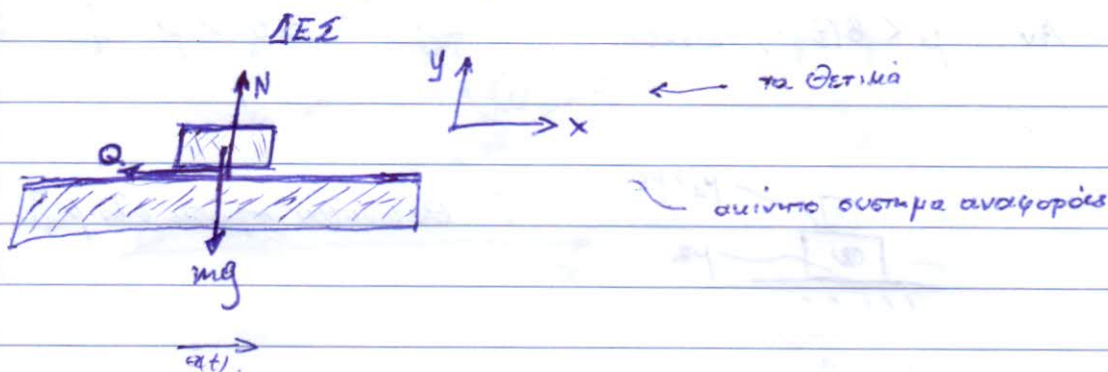
$\alpha_{\max} = B \cdot g$ $a(t) = B(t) \cdot g$

$B \approx 0,1 - 0,3$

$B \cdot 10 \text{ m/sec}^2$ α μ/sec μ/sec



Βήμα 1° : Σύστημα - Περιβάλλον



Βήμα 2° : Εξίσωση κίνησης - ΚΣΣ.

(1) $F_x = m\ddot{x} \Rightarrow -Q = m\ddot{x}$

(2) $F_y = m\ddot{y} \Rightarrow N - mg = m\ddot{y}$

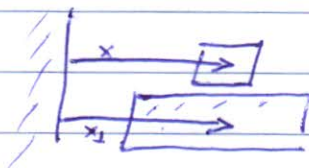
4 άγνωστοι
2 εξισώσεις

Βήμα 3° : Κινηματικοί περιορισμοί

$y = 0 \Rightarrow \ddot{y} = 0$ (3)

$x = x_1 \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{x}_1 = a_r$ (4)

Με την υπόθεση ότι το σώμα ακινητοποιείται.



$Q \leq \mu \cdot N$

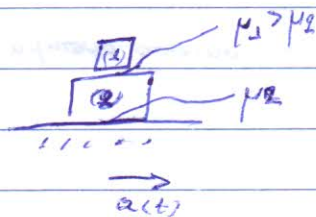
Βήμα 4^ο: Επίλυση

$$\begin{aligned} (2), (3) &\Rightarrow N = mg \\ (1), (4) &\Rightarrow Q = -ma \end{aligned}$$

Για να μην υπάρχει σχετική κίνηση, θα πρέπει $|Q| \leq \mu N$ ^{απόλυτο} $\Rightarrow$
(ή να χυρίσ απόλυτο)

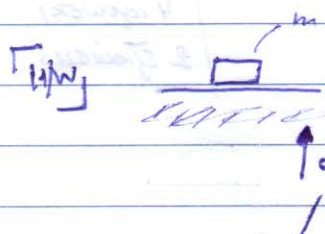
$$\begin{aligned} \Rightarrow m|a(t)| &\leq \mu mg \Rightarrow \\ \Rightarrow |a(t)| &\leq \mu g \Rightarrow \\ \Rightarrow |b(t)| g &\leq \mu g \Rightarrow \\ \Rightarrow \mu &\geq |b(t)|, \text{ μη-κίνηση (ανεξάρτητο της μάζας).} \\ &\quad \text{(στο όριο)} \end{aligned}$$

Αν $\mu < |b(t)|$, κίνηση. $\Rightarrow b(t) > \mu$ ή $b(t) < -\mu$.



Θα κινήθει πρώτα όλα μαζί.

~ ~ ~



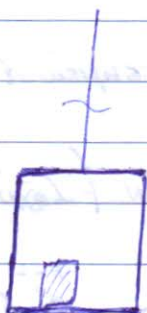
1. Συνθήκη για να χαθεί η επαφή μεταξύ του σώματος και του δαπέδου.

(Έχω επαφή, όταν $N \geq 0$)

(Με κατακόρυφη επιτάχυνση)

$\nwarrow$ δεν θέλει απόλυτο !!!

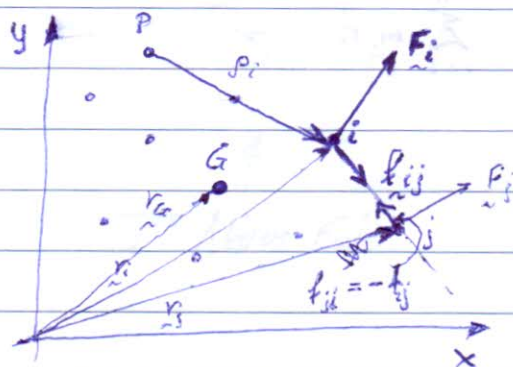
[H/W]



Κινείται με σταθερή ταχύτητα
κοβεται το νήμα
χάνεται η επαφή;



Νόμος Euler, για συστήμα υλικών σημείων.



Υλικο σημείο i

Νυλικο σημείο

Μάζα του υλικού σημείου $i = m_i$

Σύστημα του μελετώ, είναι το σύστημα N , υλικών σημείων.

- $\underline{F}_i$: εξωτερική δύναμη ^{ασκείται} (από το περιβάλλον στο υλικό σημείο i) ^(σύστημα)
- $\underline{f}_{ij}$: εσωτερική δύναμη που ασκείται από το υλικό σημείο i , στο υλικό σημείο j .
- r_i, r_j διανυσματα θέσης των σημείων i και j .

Εφαρμόζω το νόμο του Νεύτωνα για το υλικό σημείο i .

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i, i=1,2,\dots,N \quad (\text{Ισχύει ότι } f_{ii}=0)$$

$$\sum_{j=1}^{N-1} \vec{f}_{ij} \text{ είναι διάνυσμα}$$

Προσθέτω κατά μέλη

$$\sum_{i=1}^N \left[\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right] = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}_{\text{Συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων: } \vec{F}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij}}_A = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \Rightarrow$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$A = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} = \dots + \underbrace{\vec{f}_{ij} + \vec{f}_{ji}}_{\vec{f}_{ij} + (-\vec{f}_{ij})} + \dots = 0$$

Επομένως:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \quad (*)$$

G : κεντρικό βαρος των υλικών σημείων,

r_G : διανύσμα θέσης του ΚΒ.

Το $\underline{r}_G$ από τη στατική, δίνεται ως :

$$\underline{r}_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \underline{r}_i = m \underline{r}_G$$

$\underbrace{\sum_{i=1}^N m_i}_{m = \text{συνολική μάζα}} \quad \quad \quad \underbrace{\sum_{i=1}^N \underline{r}_i}_{1^{\text{η}} \text{ ποσότητα}}$

Παραχρίζοντας 2 φορές :

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\underline{r}}_i = m \ddot{\underline{r}}_G \quad (*)$$

(*) $\rightarrow$ $\underline{F} = m \ddot{\underline{r}}_G$

$\uparrow$
1^{ος} Νόμος Euler.

Κινείται σαν να είναι όλη η μάζα συγκεντρωμένη στο ΚΒ και εκεί ασκείται και η $\underline{F}$. (Νόμος του Νεύτωνα για το ΚΒ).

- 2^{ος} Νόμος του Euler.

Σημείο P, ελεύθερο να κινηθεί.

Πάντα στο σημείο P, βάζω ένα σύστημα συντεταγμένων.

$\underline{r}_i$ το διάνυσμα θέσης του i , ως προς το P.

Ισχύει ότι : $\underline{A} = \underline{B} \Rightarrow \underline{p} \times \underline{A} = \underline{p} \times \underline{B}$

$$(1) \rightarrow \underline{p_i} \times \left(\underline{F_i} + \sum_{j=1}^N \underline{f_{ij}} \right) = \underline{p_i} \times (m_i \underline{\ddot{r}_i}) \quad , \quad i=1,2,\dots,N.$$

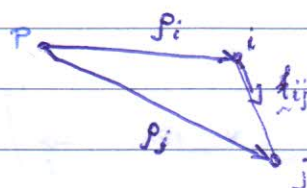
Προσθέτω κατά μέλη:

$$\sum_{i=1}^N \underline{p_i} \times \left(\underline{F_i} + \sum_{j=1}^N \underline{f_{ij}} \right) = \sum_{i=1}^N \underline{p_i} \times (m_i \underline{\ddot{r}_i})$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^N \underline{p_i} \times \underline{F_i}}_{\text{H συνισταμένη ροπή, όλων των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο P. = } \underline{M_P}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \underline{p_i} \times \underline{f_{ij}}}_{\underline{B=0}} = \sum_{i=1}^N \underline{p_i} \times (m_i \underline{\ddot{r}_i})$$

Η συνισταμένη ροπή, όλων των εξωτερικών δυνάμεων ως προς το σημείο P. = $\underline{M_P}$

$$\underline{B=0.}$$



$$\underline{B} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \underline{p_i} \times \underline{f_{ij}} = \dots + \underline{p_i} \times \underline{f_{ij}} + \underline{p_j} \times \underline{f_{ji}} + \dots =$$

$$= \dots + \underline{p_i} \times \underline{f_{ij}} + \underline{p_j} \times (-\underline{f_{ij}}) + \dots = \dots + (\underline{p_i} - \underline{p_j}) \times \underline{f_{ij}} + \dots = 0$$

Διότι $\underline{p_i} - \underline{p_j} \parallel \underline{f_{ij}}$ (όπως φαίνεται από το σχήμα)

$$\boxed{\text{Αντικαθιστώντας: } \underline{M_P} = \sum_{i=1}^N \underline{p_i} \times m_i \underline{\ddot{r}_i}}$$

2ος νόμος του Euler.

+ ΤΑΥΙΣΤΕΣ - 6 ΡΟΤΕΣ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ

Παρατηρήσεις:

$$1) \text{ Αν } \underline{\ddot{r}_G} = 0 \text{ και } \underline{\ddot{r}_i} = 0 \text{ (στατική)}$$

$$\Rightarrow \underline{M_P} = 0 \text{ και } \underline{F} = 0 \quad \text{Οι εξισώσεις της στατικής}$$

Οι εξισώσεις της στατικής προκύπτουν σαν ειδική περίπτωση του νόμου

του Euler αν θεωρήσουμε $\underline{\ddot{r}_i} = \underline{\ddot{r}_G} = 0$ (Ακίνητο ή με σταθερή ταχύτητα).

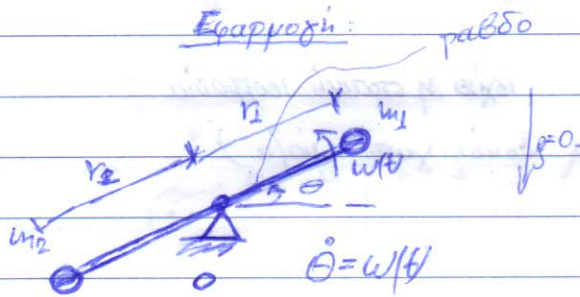
2) Εάν $m_i = 0$, $i = 1, \dots, N$.

$$\underline{M}_p = \underline{0}$$

$$\underline{F} = \underline{0}$$

ισχύει η στατική ισορροπία
(πχ δοκός χωρίς μάζα).

26/10/2012.



Αβαρές ραβδό, έτσι αμχα φερα 2 μαζα

Δυναμεις που αβκικουλα απο τη ραβδο, πανω στη στήριξη.

$\sum \tau = 0$ ~ η περιστροφή στο οριζόντιο επίπεδο

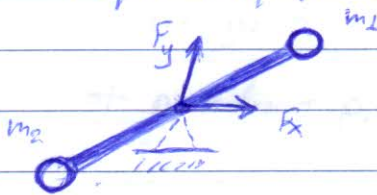
Βήμα 1^ο Συστήμα - Περιβάλλον / ΔΕΣ

Συστήμα: m_1



- αξονική
- τμήνουσα
- διατμητική

Συστήμα δύο μαζών.

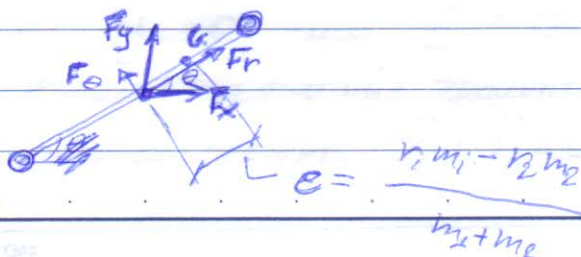


Βήμα 2^ο ΕΓΙΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ - Επίδοξη ΣΑ.

Ποδικό σύστημα

1^η και 2^η νόμοι Euler, για το σύστημα των 2 μαζών, αντικαθιστά το νόμο του Νεύτωνα που θα εφαρμόζαμε για την κάθε μάζα ξεχωριστά. (4 εξισώσεις).

Ανάλυση των δυνάμεων στην πολική διεύθυνση:



1^{ος} Νόμος Euler.

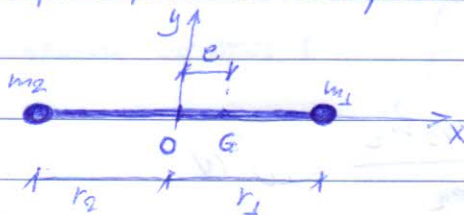
$$\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}_G$$

σε μορφή συνιστωσών :

$$\begin{cases} F_r = m a_r \\ F_\theta = m a_\theta \end{cases}$$

a_r, a_θ : η επιτάχυνση του ΚΒ του συστήματος, στις διευθύνσεις r, θ αντίστοιχα.

Κέντρο βαρύτητας του συστήματος :



Στατική

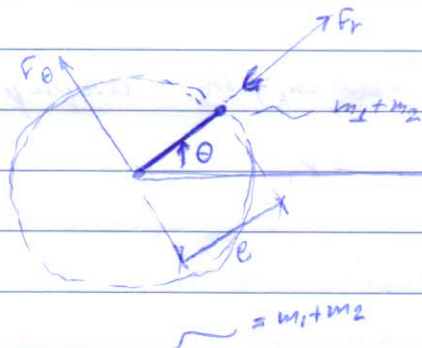
$$\vec{r}_G = \frac{\sum \vec{r}_i m_i}{\sum m_i} \quad (\text{σε διανυσματική μορφή})$$

$$e = \frac{\sum_{i=1}^N r_i m_i}{m_1 + m_2} \quad (N=2) = \frac{r_1 m_1 + (-r_2) m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \\ y_G &= \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{σε} \\ \text{μορφή} \\ \text{συνιστωσών} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow e = \frac{r_1 m_1 - r_2 m_2}{m_1 + m_2}$$

εκκεντρότητα
(απόσταση του ΚΒ
από άξονα)



κινούμενη υφή.

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t).$$

$$r = \ell$$

$$\theta = ?$$

$$\begin{aligned} F_r &= m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ F_\theta &= m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

Βήμα 3'

Κινηματικοί περιορισμοί.

$$r = e = \text{σταθερό} \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0.$$

Βήμα 4'

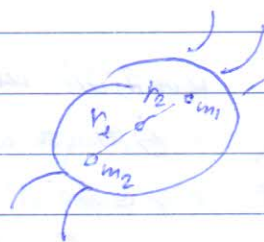
Εξισώσεις

$$\left. \begin{aligned} F_r &= -(m_1 + m_2) e \dot{\theta}^2 \\ F_\theta &= (m_1 + m_2) e \ddot{\theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} F_r &= -(m_1 + m_2) e \dot{\omega}^2 \\ F_\theta &= (m_1 + m_2) e \dot{\omega} \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{aligned} F_r &= -(m_1 + m_2) \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{m_1 + m_2} \omega^2 \\ F_\theta &= (m_1 + m_2) \frac{r_1 m_1 + r_2 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\omega} \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} F_r &= -(r_1 m_1 - r_2 m_2) \omega^2 \\ F_\theta &= +(r_1 m_1 - r_2 m_2) \dot{\omega} \end{aligned} \right.$$

Το Τμήμα



αν $m_1 \neq m_2$: απορροφία στη μέση.

$$r_1 = r_2 = r.$$

Ρόδα



μέση μ , ώστε $\varepsilon = 0$.

$$e = \frac{r_1 m_1 - r_2 m_2 + p \mu}{m_1 + m_2 - \mu}$$



$$\text{Θέσω } e = 0 \Rightarrow r_1 m_1 - r_2 m_2 + p \mu = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{r_2 m_2 - r_1 m_1}{p}$$

Αρχές Όλης και Όppης

A. Για υλικό σωματίο:

Όppη: $\vec{L} = m \cdot \vec{v}$
 $\rightarrow \dot{\vec{L}} = m \dot{\vec{v}} = m \vec{a}$
οπώς $\vec{F} = m \vec{a}$ } $\Rightarrow \boxed{\dot{\vec{L}} = \vec{F}}$

$\hookrightarrow$ ο ρυθμός μεταβολής της όppης είναι η δύναμη.

Ολοκληρώνω ως προς t : $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{L}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$

ορίσω Όλη ως συνάρτηση $\vec{F}(t)$

$$\vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ \hat{F}_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \end{aligned}$$

οπότε

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vec{L}} dt = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \vec{F}} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \Delta \vec{L}}$$

Αρχή Conservation: η μεταβολή της όppης $\hookrightarrow$ είναι ίση με την ώση

Ειδική Περίπτωση:

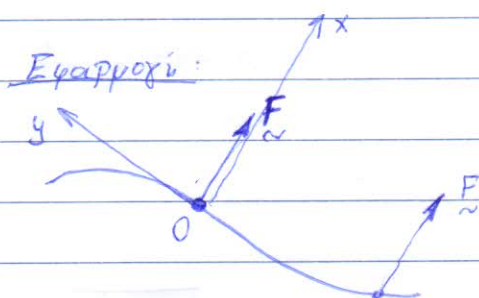
Εάν $\vec{F} = 0$

(συμβαίνει αν $\vec{F}(t) = 0 \forall t \in [t_1, t_2]$)

τότε $\vec{0} = \Delta \vec{L} \rightarrow$

$$\boxed{\vec{L}(t_2) = \vec{L}(t_1)}$$

$\hookrightarrow$ Αρχή Διατήρησης της Όppης



σε όλα τα επίπεδα της τροχιάς η δύναμη $\vec{F}$ έχει την ίδια διεύθυνση και μέγεθος.

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$$

0

Αρχή moments - ορμής ως προς το σύστημα Oxy.

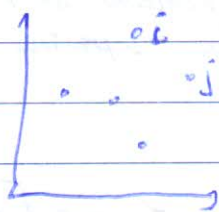
$$\hat{F}_x = \Delta L_y = L_y(t_2) - L_y(t_1)$$

$$0 \approx \hat{F}_y = \Delta L_x = L_x(t_2) - L_x(t_1) \rightarrow L_y(t_2) = L_y(t_1)$$

→ Αρχή διατήρησης της ορμής στην κατεύθυνση y.

(Οι δυνάμεις είναι μηδέν).

B. Σύστημα πολλών Σημείων



Ορμή: $\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i$

$$\Rightarrow \dot{\vec{L}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = m \ddot{\vec{r}}_G$$

Γιατί $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = m \ddot{\vec{r}}_G$ $\dot{\vec{L}} = \vec{F}$

Οπως $\vec{F} = m \ddot{\vec{r}}_G$

Ολοκληρώνω ως προς t.

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

Ορίσω ως μέση της συνισταμένης δύναμης $\vec{F}_{av}$.

$$\vec{F} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}/dt dt \quad \leftarrow \quad \begin{aligned} \hat{L}_x &= \int_{t_1}^{t_2} F_x dt \\ \hat{L}_y &= \int_{t_1}^{t_2} F_y dt \end{aligned}$$

Οπότε :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{L} dt = \vec{F} \rightarrow \vec{L}(t_2) - \vec{L}(t_1) = \vec{F} \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \Delta \vec{L}}$$

(και όλα τα άλλα ίδια ...)

~

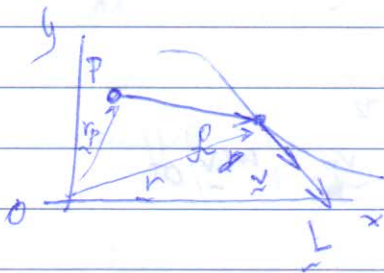
Αρχές Στροφορμής και Στροφικής Οδού.

A. Υλινό Σύστημα

Στροφορμή :
(ως προς το σημείο P)

$$\vec{H}_P = \vec{p} \times \vec{L} \quad (\text{Ποινή } \vec{L} \text{ ως προς } P)$$

το διάνυσμα $\vec{p}$ από τον υλικό σωματίδιο ως προς το P.



$$\vec{p} = \vec{r} - \vec{r}_P$$

$$\dot{\vec{p}} = \dot{\vec{r}} - \dot{\vec{r}}_P = \vec{v} - \vec{v}_P$$

$$\dot{\vec{H}}_P = \dot{\vec{p}} \times \vec{L} + \vec{p} \times \dot{\vec{L}} = (\vec{v} - \vec{v}_P) \times \vec{L} + \vec{p} \times \vec{F}$$

$$\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$$

$$\vec{v} \times \vec{L} - \vec{v}_P \times \vec{L}$$

$$\vec{L} \times \vec{v} - \vec{L} \times \vec{v}_P$$

$$\vec{L} \times (\vec{v} - \vec{v}_P) = \vec{L} \times \vec{v}_{rel}$$

$$\Rightarrow \dot{\underline{H}}_P = \underline{\rho} \times \underline{\dot{F}} - \underline{v}_P \times \underline{\dot{L}} \rightarrow \boxed{\underline{\dot{H}}_P = \underline{\rho} \times \underline{\dot{F}} - \underline{v}_P \times (m \underline{\dot{v}})}$$

Αναλογία :

$$\boxed{\underline{\dot{L}} = \underline{F}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{\dot{H}}_P = \underline{M}_P - \underline{v}_P \times m \underline{v}}$$

Παρατηρώ ότι $\underline{H}_P = \underline{\rho} \times \underline{F} \equiv \underline{M}_P$ ~ ραυ δύναμης $\underline{F}$
ως προς το P .
ή ισοδύναμα

$$\underline{H}_P = \underline{M}_P$$

σταν

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{v} \parallel \underline{v}_P \\ P = \text{σταθερό σημείο} \Rightarrow \underline{v}_P = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow \underline{v}_P = 0$

Στροφομή ραυ

αποκρίνω
ως προς t

$$\int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_P dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{H}_P dt + \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}_P \times (m \underline{v}) dt$$

Ορίω ως στροφομή ραυ :

$$\underline{\hat{M}}_P = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M}_P dt$$

προκύπτει ότι :

$$\boxed{\underline{\hat{M}}_P = \underline{H}_P(t_2) - \underline{H}_P(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \underline{v}_P \times (m \underline{v}) dt}$$

$\rightarrow$ ραυ στροφομής
ρως -
Στροφομής

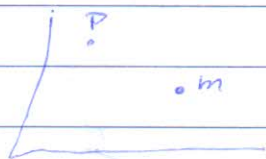
Αναλογία :

$$\boxed{\underline{\hat{F}} = \underline{L}(t_2) - \underline{L}(t_1)}$$

Αρχές Στροφορμής και Στροφικής Όσης (Συνέχεια)

A. Υλικό Σημείο

$$\vec{H}_P = \vec{p} \times \vec{L}$$



Αρχή διατήρησης
στροφικής ώσης -
στροφορμής.

$$\vec{H}_P = \vec{M}_P - \vec{r}_P \times m\vec{v}$$

$$\hat{\vec{M}}_P = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_P dt, \quad \vec{M}_P = \vec{H}_P(t_2) - \vec{H}_P(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_P \times (m\vec{v}/dt)$$

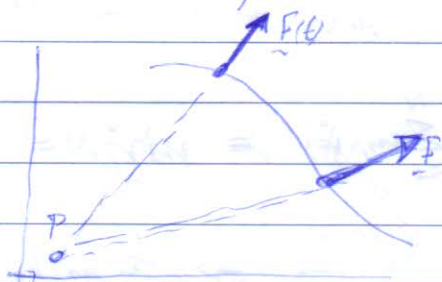
$$\text{Εαν } \vec{r}_P \times \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \hat{\vec{M}}_P = \vec{H}_P(t_2) - \vec{H}_P(t_1).$$

$$\text{Εαν } \hat{\vec{M}}_P = \vec{0} \Rightarrow \vec{H}_P(t_2) = \vec{H}_P(t_1). \text{ Αρχή διατήρησης της στροφορμής.}$$

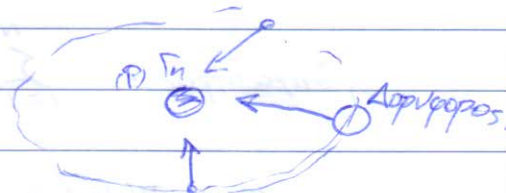
$$\text{Συνθήκες για } \vec{M}_P = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_P(t) dt = \vec{0} \text{ είναι } \vec{M}_P(t) = \vec{0} \quad t \in [t_1, t_2].$$

$$\vec{M}_P = \vec{r}_P \times \vec{F}$$

Εφαρμογή: Μια περίπτωση να έχω $\vec{M}_P = \vec{0}$ είναι ο φορέας της $\vec{F}$ να διέρχεται από το σημείο P.



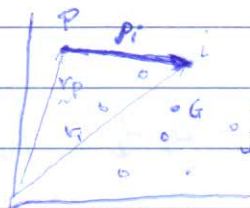
πχ: Δορυφόρος



- Για το δορυφόρο ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

$$F = G \frac{m \cdot M}{r^2}$$
$$L_i = m_i \cdot v_i = m_i \cdot r_i \cdot \omega$$

Στροφορμή: $H_p = \sum_{i=1}^N p_i \times L_i = \sum_{i=1}^N p_i \times (m_i \vec{v}_i) \quad (1)$



$$H_p = \sum_{i=1}^N \left[\underbrace{\dot{p}_i \times L_i}_{-V_p + m_i V_G} + \underbrace{\dot{p}_i \times m_i \ddot{r}_i}_{\dot{M}_p \text{ (2nd Moment Euler)}} \right] =$$

$$p_i = r_i - r_p \rightarrow \dot{p}_i = \dot{r}_i - \dot{r}_p \rightarrow \dot{p}_i = v_i - v_p$$

$$\sum_{i=1}^N p_i \times L_i = \sum_{i=1}^N (v_i - v_p) \times (m_i v_i) = \sum_{i=1}^N \left[\underbrace{v_i \times (m_i v_i)}_{0} - v_p \times (m_i v_i) \right]$$

$$= - \sum_{i=1}^N v_p \times m_i v_i = - \underbrace{v_p \times \sum_{i=1}^N m_i v_i}_{m v_G}$$

Параметры: $\sum_{i=1}^N m_i v_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{r}_i = m \dot{r}_0 = m \cdot v_0$

Από παραπάνω :
$$r_G = \frac{\sum_{i=1}^N m_i r_i}{\sum_{i=1}^N m_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i r_i = m r_G$$
 και παρατηρούμε.

Enquiries: $H_p = \frac{M_p}{V_p} \times \ln V_{fo}$ (2)

Συνθήκες για να ισχύει η $\hat{H}_p = \hat{M}_p$ είναι :

1. Ρ ακίνητο $\Rightarrow \underline{\underline{v_p = 0}}$
2. $\underline{\underline{v_p \parallel v_G}}$
3. $\underline{\underline{P \equiv G}} \Rightarrow \underline{\underline{v_p = v_G}}$

Στροφομή Δύση :

$$\hat{\underline{\underline{M}}} = \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{M(t)}} dt$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{H_p}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{M_p}} dt - \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{v_p}} \times m \underline{\underline{v_G}} dt$$

$$\underline{\underline{H_p(t_2)}} - \underline{\underline{H_p(t_1)}}$$

$$\hat{\underline{\underline{M_p}}}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{\underline{\underline{M_p}}} = \underline{\underline{H_p(t_2)}} - \underline{\underline{H_p(t_1)}} + \int_{t_1}^{t_2} \underline{\underline{v_p}} \times m \underline{\underline{v_G}} dt} \quad (4)$$

στροφομή ως
αρχή διατήρησης
- στροφομής

Εάν $\hat{\underline{\underline{M_p}}} = 0$ και $\underline{\underline{v_p}} \times \underline{\underline{v_G}} = 0$ ΤΟΤΕ

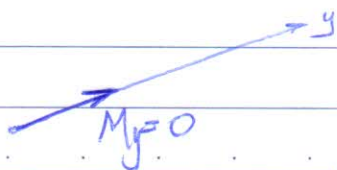
$$(4) \Rightarrow \underline{\underline{H(t_2)}} = \underline{\underline{H(t_1)}} \quad \text{Αρχή διατήρησης της στροφομής.}$$

$$H_x(t_2) = H_x(t_1)$$

$$H_y(t_2) = H_y(t_1)$$

$$H_z(t_2) = H_z(t_1)$$

π.χ :



$$M_y = 0 \rightarrow H_y(t_2) = H_y(t_1)$$

Η ΑΔΣ ισχύει ως προς τον άξονα y.

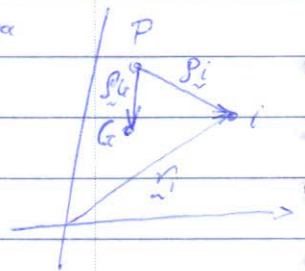
Η Αρχή διατήρησης στροφορμής ισχύει ως προς συγκεκριμένη διεύθυνση εάν η ροπή των δυνάμεων ως προς αυτή την διεύθυνση είναι 0.

[HW] Μπορεί να αποδειχθεί ότι: (για σύστημα ιδίων βαρών).
 1. $\underline{\underline{H_p}} = \underline{\underline{H_G}} + \underline{\underline{r_G}} \times m \underline{\underline{v_G}}$ (Ώσκησε στο σπίτι).

- Σχετική Στροφορμή:

$$\underline{\underline{H_p}} = \sum_{i=1}^N \underline{\underline{r_i}} \times m_i \underline{\underline{\dot{r_i}}}$$

Σχετική ταχύτητα του i ως προς το σημείο P.



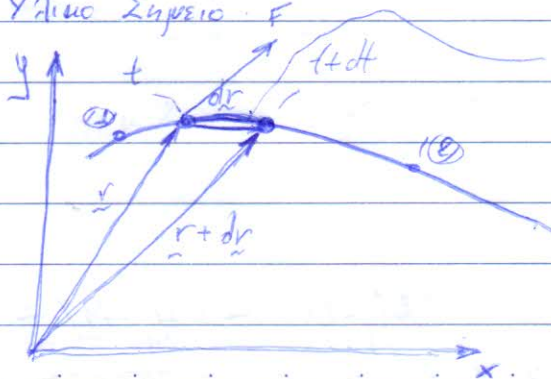
Η απόλυτη στροφορμή σχετίζεται με τη σχετική στροφορμή:

2. $\underline{\underline{H_p}} = \underline{\underline{H_r}} + \underline{\underline{r_G}} \times m \underline{\underline{v_P}}$ (Αποδείξη?)

3. $\underline{\underline{H_G}} = \underline{\underline{H_r}}$, [διότι: $\underline{\underline{r_G}} = 0$]

Αρχές Έργου - Ενέργειας

A. Υλικό Σημείο F



Εφαπτομενικό στην τροχιά (ακολουθεί την τροχιά.).

εσωτερικό διάνομενο

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \text{απειροσλάχιστο έργο της δύναμης } \vec{F} \text{ στη θέση } \vec{r}.$$

→ στη διεύθυνση της κίνησης, εφαπτομενικό στην τροχιά.

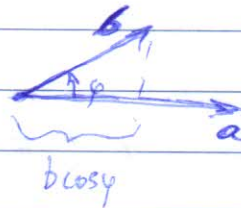
Έργο της $\vec{F}$ από τη θέση (1) στη θέση (2).

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

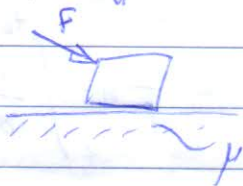
Παρατηρήσεις:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi$$

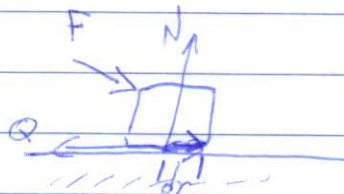
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$



Παράδειγμα



Έργο δυνάμεων επαφής.



$$\text{Έργο της } N: \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\text{Έργο της } Q: \vec{Q} \cdot d\vec{r} = -Q dr$$

$$W_Q = \int_1^2 \vec{Q} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 Q dr = -Q \cdot \Delta r$$

το απειροσλάχιστο έργο

Εάν η Q είναι σταθερή!

Νόμος Νεύτωνα

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}} \quad (2)$$

$$(2) \text{ στην (1)}: W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\ddot{\vec{r}} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} dt$$
$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \dot{\vec{r}} dt$$

Παρατηρώ: $\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}})$

γιατί $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} (\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}) = \frac{1}{2} 2\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}}$

Άρα

$$W = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} m \frac{d}{dt} (\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = \frac{1}{2} m \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\dot{\vec{r}}^2}{dt} dt =$$
$$\underbrace{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}_{|\dot{\vec{r}}|^2 = v^2}$$

$$= \frac{1}{2} m \left[v(t_2)^2 - v(t_1)^2 \right]$$

Εισαγωγή την κινητική ενέργεια: $T = \frac{1}{2} m v^2$
ενός σωματιδίου.

Επομένως $W = T_2 - T_1 \Rightarrow \boxed{W = \Delta T} \quad (3)$

το οποίο είναι η μεταβολή της κινητικής ενέργειας

Έργο Δυνάμεως

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Θέλω να προσδιορίσω συνθήκες έτσι ώστε το έργο της δύναμης να είναι ανεξάρτητο της τροχιάς.

Για να συμβεί αυτό θα πρέπει να ισχύει:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dV \quad (4)$$



Διότι στην περίπτωση αυτή:

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_1^2 dV = -(V_2 - V_1) \quad (5)$$

δηλ. δεν εξαρτάται από την τροχιά.

πώς υπάρχει

Η δύναμη $\vec{F}$, στην περίπτωση V , καλείται εσθητική δύναμη.
Η συνάρτηση V είναι συνάρτηση του x, y, z $V \equiv V(x, y, z)$
καλείται εσθητικό δυναμικό ή συναρτησιακή ενέργεια.

30/10/2018

$$W = \int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

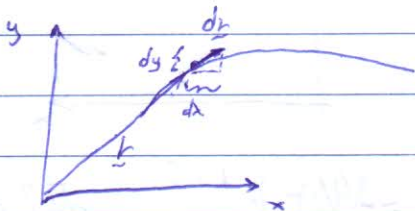
Εάν $\underline{F} \cdot d\underline{r} = -dV$ (4).

$$\int_1^2 \underline{F} \cdot d\underline{r} = -(V_2 - V_1) \quad (5).$$



$V(x, y, z) =$
= συνάρτηση χωρικών
συντεταγμένων.

Καρτεσιανό Σ.Σ.



$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z$$

$$d\underline{r} = dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z.$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz.$$

$$(4) \Rightarrow (F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z) \cdot (dx \underline{e}_x + dy \underline{e}_y + dz \underline{e}_z) = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy -$$

$$\Rightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{\partial V}{\partial x} dx - \frac{\partial V}{\partial y} dy - \frac{\partial V}{\partial z} dz. \quad -\frac{\partial V}{\partial z} dz. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \quad (4).$$

Για συντηρητικές δυνάμεις.

$$\underline{F} = F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \underline{e}_z \right)$$

" $\underline{\nabla} V$

Αρα $\Rightarrow \underline{F} = -\underline{\nabla} V$

απου. $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \underline{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \underline{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \underline{e}_z.$

Γνωρίζω όμως :

$$\nabla \times \nabla V = 0$$

Λέγεται

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\text{εδώ: } \nabla \times \nabla V = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \end{vmatrix} + \dots = \vec{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] + \dots =$$

$$= \vec{e}_x \left[\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right] + \dots = 0$$

~~εδώ $\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial z}$!~~

Άρα : $\nabla \times \vec{F} = 0$, αν $\vec{F}$: συντηρητική.

Ισχύει όμως και αν $\nabla \times \vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}$: συντηρητική.

Άρα : $\nabla \times \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F}$: συντηρητική.

Τα πεδία που ικανοποιούν αυτό ~~απαιτούνται~~ ονομάζονται αστροβίδια πεδία.

Για συντηρητική δύναμη :

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C -\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(\vec{V}_2 - \vec{V}_1) = -\Delta V$$

$$\Delta V = V_2 - V_1$$

Εάν η συνισταμένη των συντηρητικών δυνάμεων που αγγίζει σε κάθε σημείο είναι $\vec{F}_c$ (conservative), ενώ η συνισταμένη των μη συντηρητικών δυνάμεων είναι $\vec{F}_{nc}$ non-conservative

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$$

©NEXT CO GREECE

Το συνολικό έργο :

$$W = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_1^2 (\vec{F}_c + \vec{F}_{nc}) \cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_c \cdot d\vec{r}}_{-\Delta V} + \int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r} =$$
$$= -\Delta V + \underbrace{\int_1^2 \vec{F}_{nc} \cdot d\vec{r}}_{W_{nc}} \Rightarrow \boxed{W = -\Delta V + W_{nc}}$$

Όπως (3) $\rightarrow W = \Delta T$

Άρα : $-\Delta V + W_{nc} = \Delta T \rightarrow W_{nc} = \Delta T + \Delta V \rightarrow$

$$\rightarrow W_{nc} = \Delta(T + V)$$

οπότε : $T + V = E = \text{συνολική μηχανική ενέργεια}.$

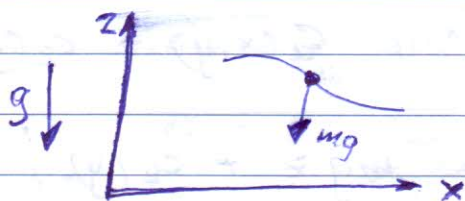
$$\boxed{W_{nc} = \Delta E \text{ ή } W_{nc} = \Delta(T + V)} \quad (6)$$

$\hookrightarrow$ Αρχή Έργου Ενέργειας.

Εάν $W_{nc} = 0 \rightarrow 0 = \Delta E$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} E_1 = E_2 \\ \text{ή} \\ T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \end{matrix}} \leadsto \text{Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.}$$

Εφαρμογή: Πεδίο Βαρύτητας της Γης



$$\vec{F} = 0\vec{e}_x + 0\vec{e}_y + (-mg)\vec{e}_z = -mg\vec{e}_z$$

1. Είναι συντηρητική;

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & -mg \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \left[\frac{\partial}{\partial x}(-mg) - \frac{\partial}{\partial z}(0) \right] + \vec{e}_y [0] + \vec{e}_z [0] = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \quad \underline{\text{ΝΑΙ}}$$

2. Δυναμική Ενέργεια $V(x, y, z)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_x \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_y \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = mg \quad (c)$$

$$(c) \Rightarrow \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = mg \xrightarrow[\text{ως προς } z]{\text{από αλγεβρά}} V(x, y, z) = \int mg dz + \zeta(x, y)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x, y, z) = mgz + \zeta(x, y)}$$

Αντικαθιστώ στην (α) $\rightarrow \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [mgz + C_1(x,y)] = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\partial C_1(x,y)}{\partial x} = 0$ συνάρτ. ως προς x $\Rightarrow C_1(x,y) = C_2(y)$

Επομένως $V(x,y,z) = mgz + C_2(y)$

Αντικαθιστώ στην (β) $\rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [mgz + C_2(y)] = 0 \rightarrow$

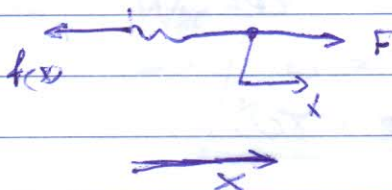
$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) \rightarrow \frac{\partial C_2(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow C_2(y) = V_0 \text{ (σταθερά)}$

Άρα τελικά:

$$V(x,y,z) = mgz + V_0$$

~

Εφαρμογή II : Δυναμική Ενέργεια Δυναμής Ελατηρίου.



$$\vec{F} = -f(x) \vec{e}_x$$

$$1. \quad \nabla \times \vec{F} = \dots = \vec{0}$$

(H/W)

2. Δυναμική Ενέργεια $V(x, y, z)$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = f(x) \xrightarrow{\text{όσον ως προς } x} V = \int f(x) dx + C_1(y, z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

Με τα ίδια $\dots \rightarrow C_1(y, z) = V_0$

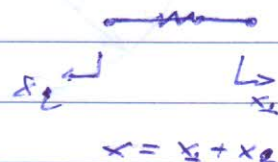
Άρα: $V(x, y, z) = \int f(x) dx + V_0$

• Για γραμμικά ελατήρια: $f(x) = kx$

$$V(x, y, z) = \int kx dx + V_0 = k \int x dx + V_0 = \frac{1}{2} kx^2 + V_0$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} kx^2 + V_0$$

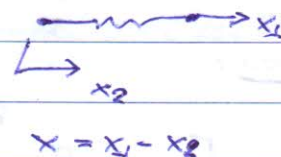
x = επιένδυση από την απαμορφωτική θέση



• Για άλλα ελατήρια (η δύναμη εξαρτάται από την επιένδυση).

πχ: $f(x) = kx^3$

$$V = \int kx^3 dx + V_0 = k \frac{x^4}{4} + V_0$$



?

Εξισώσεις Κίνησης

$$\vec{F} = m \vec{r} \rightarrow 3 \text{ εξισώσεις}$$

Δυναμικές
ταχύτητες

$$\vec{P} = \Delta \sum_{i=1}^N (m_i \vec{v}_i)$$

Ορμή - Σελ : $\vec{F} = \Delta \vec{L} \rightarrow 3 \text{ εξισώσεις}$

Στροφορμή - Στροφορμή - σελ : $L_z = J_z \rightarrow 3$
 $M = \Delta H + \dots \rightarrow 3 \text{ εξισώσεις}$
 $H_1 = H_2 \rightarrow 3$

Έργο - Ενέργεια : $W_{nc} = \Delta E \rightarrow 1 \text{ εξίσωση}$

$E_1 = E_2 \rightarrow 1 \text{ εξίσωση}$

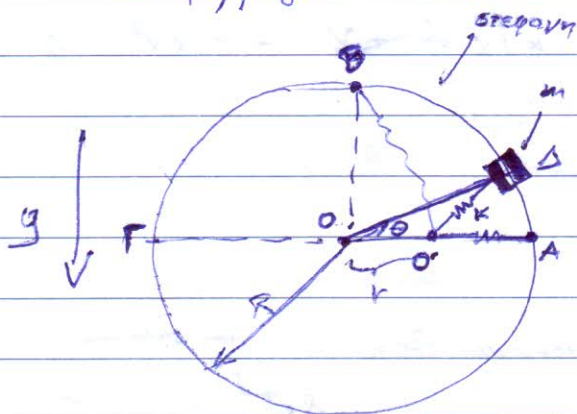
$W_{nc} = \Delta(T + V)$
 ταχύτητες
 δυναμικές
 θέσεις

Οι ανεξάρτητες εξισώσεις είναι 3.

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
 ταχύτητα
 δυναμικές
 θέσεις

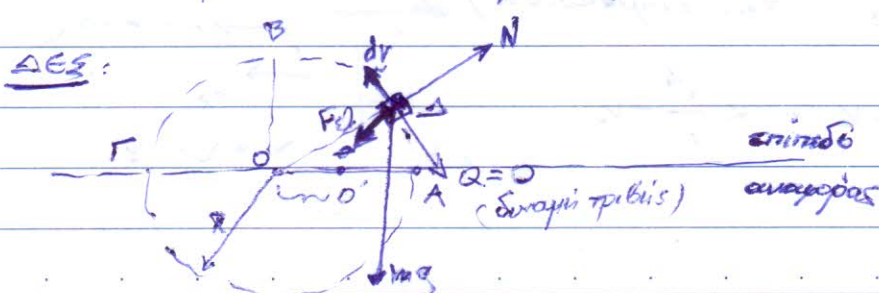
Αρα στο Βιβλ 2^ο, θα έχω 3 απ' αυτές τις εξισώσεις, οι οποίες μας βολεύουν.

Εφαρμογή III



$\mu = 0$ αντίθετος τριβής
 Η απαγορευμένη θέση ελατηρίου είναι
 η οριζόντια όα
 κ : σταθερά ελατηρίου.
 Δίνεται : V_B (ταχύτητα)
 Σητείται : $V_A, V_T, V(\theta)$.

Βιβλ 1^ο : Σύστημα - Περιβάλλον



• Αν θέλουμε να
 γράβει καπου, θα
 πρέπει η ταχύτητα
 σε αυτό το σημείο
 να είναι ≥ 0 .

Πήρα 2^ο] Ε. Κινητός ή Αρχή (Σταθ-Ορμή, Διατ. Ορμή, Διατ. Ενέργεια, κλπ).

Αρχή Έργου-Ενέργειας :

- Συντηρητικές Δυνάμεις

$$mg$$

Δυναμική Ενέργεια

$$mgz + V_0$$

$$\frac{1}{2} kx^2 + V_0'$$

- Μη συντηρητικές Δυνάμεις

N

W_{nc}

0

Διότι $N \perp dr$

(ή) $N \perp$ τροχιά κίνησης

$W_{nc} = 0 \rightarrow$ Άρα ισχύει η Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

Θέση 1 : A

Θέση 2 : B

$$\text{Άρα } T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m v_B^2$$

$$V_A = 0 + V_0' (\text{απορροχή}) + mg \cdot 0 + V_0 = V_0 + V_0'$$

$$V_B = \frac{1}{2} k \delta_B^2 + V_0' + mgr + V_0$$

δ_B : η επιμήκυνση του ελατηρίου στη θέση B.

$$\delta_B = OB - OA = \sqrt{R^2 + r^2} - (R - r)$$

↓
φυσικό μήκος

$$(A) \rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + \cancel{V_0'} + \cancel{V_0} = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k \delta_B^2 + \cancel{V_0'} + mgR + \cancel{V_0} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_A^2 = v_B^2 + \frac{k}{m} \delta_B^2 + 2gR \rightarrow$$

$$\rightarrow v_A^2 = v_B^2 + \frac{k}{m} \left[\sqrt{R^2 + r^2} - (R-r) \right]^2 + 2gR$$

— Θεση 1 : B

Θεση 2 : Γ

$$T_B + V_B = T_\Gamma + V_\Gamma$$

$$T_\Gamma = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2$$

$$V_\Gamma = \frac{1}{2} k (OT - OA)^2 + 0 = \frac{1}{2} k [R+r - (R-r)]^2 = \frac{1}{2} k (2r)^2 = \underline{2kr^2}$$

$$\text{Αρα } (A) \rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} k \delta_B^2 + mgR = \frac{1}{2} m v_\Gamma^2 + 2kr^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{v_\Gamma^2 = v_B^2 + \frac{k}{m} \delta_B^2 + 2gR - \frac{4k}{m} r^2}$$

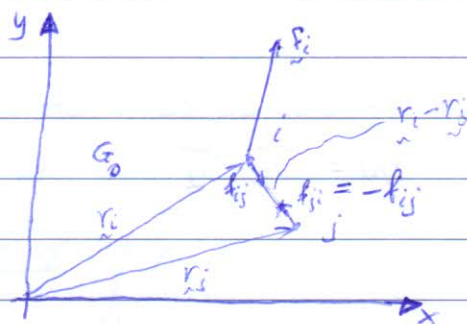
— Και το ίδιο για $v(\theta)$.

Θεση 1 : B

Θεση 2 : Δ

→ H/W

Αρχές Έργου - Ενέργειας Συστήμα Υλικού Σημείου.



Έργο των δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα

$$W = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \left(\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i \quad (1)$$

Γνωρίζω από το νόμο του Νεύτωνα

$$\vec{F}_i + \sum_{j=1}^N \vec{f}_{ij} = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

$$(1) \Rightarrow W = \sum_{i=1}^N \int_1^2 m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \int_1^2 m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} dt}_{=\vec{v}_i dt} = \sum_{i=1}^N \int_1^2 m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \underbrace{\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}_{=\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i} dt =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_1^2 \frac{1}{2} m_i \frac{d}{dt} (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) dt \Rightarrow$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = v_i^2$$

$$\Rightarrow W = \sum_{i=1}^N \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) dt$$

Εισάγω την κινητική ενέργεια του συστήματος των N υλικών σημείων $T = \sum_{i=1}^N T_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2$, $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$$\Rightarrow W = \int_1^2 \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m v_i^2 \right)}_T dt = \int_1^2 \frac{dT}{dt} dt = T_2 - T_1 = T \left(\frac{1}{2} T \right) = \Delta T.$$

Επομένως:

$$W = \Delta T \quad \xrightarrow{h} \quad W = T_2 - T_1$$

Εξωτερικές Δυνάμεις

$$\text{Εστω ότι } F_i = F_{i,c} + F_{i,nc},$$

$$\text{όπου } F_{i,c} = -\nabla V_i \quad \text{και} \quad \underbrace{F_{i,nc}}_{=W} \cdot d\vec{r}_i = -dV_i$$

Παρατηρώ ότι:

$$\int_1^2 \underbrace{F_{i,c}}_{\text{αντικαθίσταται}} d\vec{r}_i = - \int_1^2 dV_i = -\Delta V_i$$

Επομένως ο πρώτος όρος στην (1), για συντηρητικές δυνάμεις παίρνει τη μορφή:

$$\sum_{i=1}^N \int_1^2 \underbrace{F_{i,c}}_{\text{αντικαθίσταται}} d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (-\Delta V_i) = -\Delta \left[\underbrace{\sum_{i=1}^N V_i}_V \right]$$

Εισάγω την δυναμική ενέργεια των εξωτερικών συντηρητικών δυνάμεων.

$$V = \sum_{i=1}^N V_i$$

τότε

$$\sum_{i=1}^N \int F_{i,c} d\vec{r}_i = -\Delta V$$

Κάποιες από τις εξωτερικές δυνάμεις είναι συντηρητικές, άλλες είναι μη συντηρητικές.

Εσωτερικές Δυνάμεις

Plazmoneus :

$$\tilde{f}_{ij} = \tilde{f}_{ij,c} + \tilde{f}_{ij,nc}.$$

ΟΠΩΣ Ο ΣΥΝΤΑΞΙΣ ΟΡΕ ΤΗΣ (!) ΧΑΙ ΤΙΣ ΣΥΝΤΙΠΙΤΕΡΕΣ ΣΥΝΤΑΞΙΣ ΠΑΡΑΠΕΙ ΤΗ
ΜΟΡΦΗ:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_1^2 f_{ij,c} \cdot dr_i &= \dots + \int_1^2 f_{ij,c} dr_i + \int_1^2 f_{ji,c} dr_j + \dots = \\ &= \dots + \int_1^2 f_{ij,c} dr_i - \int_1^2 f_{ji,c} dr_j + \dots = \\ &= \dots + \int_1^2 \underbrace{f_{ij,c} \cdot (dr_i - dr_j)}_{= dV_{ij}} + \dots \end{aligned}$$

Εάν $f_{ij}, c \cdot (dr_i - dr_j) = -dV_{ij}$, τότε υπολογίζουμε f_{ij} συντηρητικές
εσωτερικές δυνάμεις.

Οπότε

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_1^2 \frac{1}{r_{ij,c}} dr_i = \sum_i \int_1^2 -dV_{ij} = - \sum_i \Delta V_{ij} = \underbrace{- \Delta \sum_j V_{ij}}_{V'} = -\Delta V'$$

Η δυναμική ενέργεια V_{ij} , εξαρτάται από την απόσταση μεταξύ των υλικών σφαιρών i και j .

$$V_{ij} = V_{ij}(|\underline{r}_i - \underline{r}_j|)$$

Άρα το συνολικό έργο των συντηρητικών (εξωτερικών και εσωτερικών) δυνάμεων

$$W_c = \sum_{i=1}^N -\Delta V_i - \Delta V' = -\Delta \left[\sum_{i=1}^N (V_i + V') \right]$$

V = συνολική ενέργεια για όλες τις εξωτερικές και εσωτερικές συντηρητικές δυνάμεις.

Οπότε το συνολικό έργο

$$W = \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_1^2 \left(F_{ic} + \sum_{j=1}^N f_{ij,c} \right) dr_i}_{W_c = -\Delta V} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \int_1^2 \left(F_{i,nc} + \sum_{j=1}^N f_{ij,nc} \right) dr_i}_{W_{nc}}$$

$$\left. \begin{array}{l} W = -\Delta V + W_{nc} \\ W = \Delta T \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \Rightarrow -\Delta V + W_{nc} = \Delta T \Rightarrow \boxed{W_{nc} = \Delta(T+V)}$$

Αρχή έργου-ενέργειας

Εάν $W_{nc} = 0 \rightarrow \Delta(T+V) = 0 \rightarrow \boxed{T+V = \text{σταθερό}}$

$\Rightarrow \boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$ Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$E = T + V = \text{μηχανική ενέργεια συστήματος.}$

Πρόταση: Το ^{συνολικό} έργο των εσωτερικών δυνάμεων για ένα σύστημα πολλών σωματιδίων με σταθερές αποστάσεις μεταξύ των i και j ή i και j , είναι ίσο με 0 μηδέν.

Παρατήρηση: Το συνολικό έργο των εσωτερικών δυνάμεων για ένα στερεό σώμα που κινείται όπως ένα είναι μηδέν.



Απόδειξη:

Απόσταση μεταξύ i και j σταθερή στην αλληλεξέλιξη: $|\underline{r}_i - \underline{r}_j| = \text{σταθερό} \quad \forall i, j$
 $\Rightarrow |\underline{r}_i - \underline{r}_j|^2 = \text{σταθερό} \Rightarrow \frac{d}{dt} |\underline{r}_i - \underline{r}_j|^2 = 0 \quad \forall i, j$ (*)

$$W = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_1^2 \underline{f}_{ij} \cdot d\underline{r}_i = \dots + \int_1^2 \underline{f}_{ij} \cdot d\underline{r}_i + \int_1^2 \underline{f}_{ji} \cdot d\underline{r}_j + \dots =$$

$$= \dots + \int_1^2 \underline{f}_{ij} \cdot d\underline{r}_i - \int_1^2 \underline{f}_{ij} \cdot d\underline{r}_j + \dots =$$

$$= \dots + \int_1^2 \underline{f}_{ij} \cdot (d\underline{r}_i - d\underline{r}_j) + \dots \quad (**)$$

Θέλουμε να το βρούμε μικρότερο (σημειώνοντας ότι είναι κατεύθυνση)

$$d(\underline{f}, \underline{g}) = d\underline{f} \cdot \underline{g} + \underline{f} \cdot d\underline{g}$$

$$(*) \Rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} |\underline{r}_i - \underline{r}_j|}_{B} \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_j) + (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} (\underline{r}_i - \underline{r}_j)}_A = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \frac{d}{dt} |\underline{r}_i - \underline{r}_j| \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_j) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \cdot (\underline{r}_i - \underline{r}_j) = 0 \Rightarrow$$

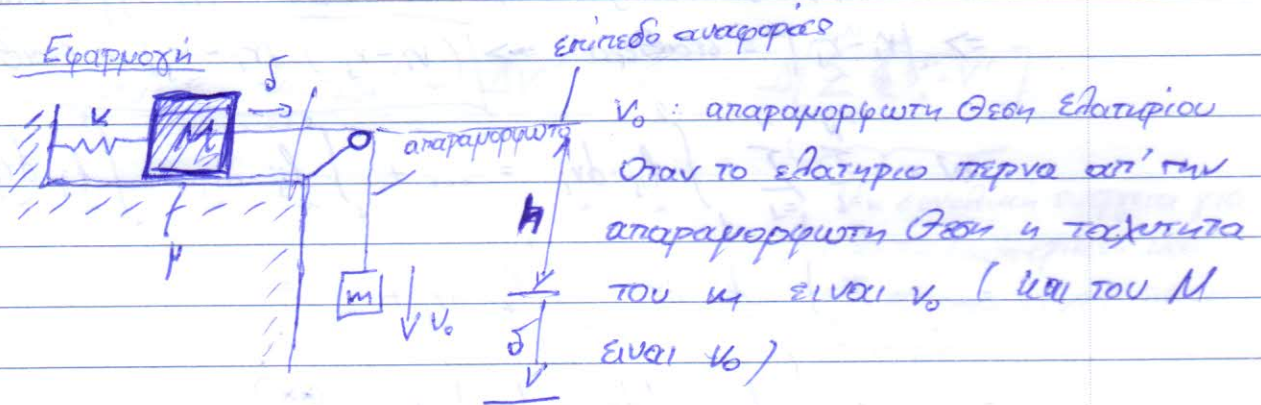
$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\underline{r}_i - \underline{r}_j) \perp (\underline{r}_i - \underline{r}_j)$$

Οπότε $\underline{r}_i - \underline{r}_j \parallel \underline{f}_{ij}$ (αντιστροφή)

$$\Rightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (d\underline{r}_i - d\underline{r}_j) = 0$$

Αρα (**) $\Rightarrow \boxed{W_{\text{εξωτερ. δυν.}} = 0}$

- Δευτέρα 19 - Πρόβος (Δύρες). (Μιαύρα)



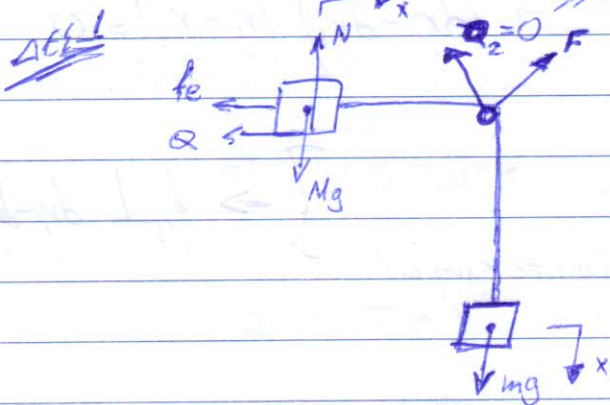
- Ζητείται :
1. Η μέγιστη επιμήκυνση του ελατηρίου.
 2. Η ένταση T του καλωδίου (ή w).

Λύση

1. Βήμα 1^ο : Σύστημα - Περιβάλλον

Αν πάρουμε ως σύστημα και τις 2 μάζες, ζητούμε τις ταχύτητες T , ως
 εσωτερικές δυνάμεις.

Αποσπασματίζουμε σε ένα βήμα - (απ' το αρχικό).
 Αποσπασματίζουμε καλώδιο $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ οι εσωτερικές δυνάμεις έχουν
 έργο μηδέν



$Q_2 = 0$ δυνάμεις τριβής για να μην
 οδεύει
 (έχει έργο μηδέν)

Βήμα 2^ο : ΚΣΣ

Αρχή Έργου Ενέργειας.

- Συντηρητικές Δυνάμεις

$$mg$$

$$Mg$$

$$kx$$

Δυναμική Ενέργεια.

$$mgz$$

$$Mgz$$

$$\frac{1}{2} kx^2$$

- Μη συντηρητικές Δυνάμεις

$$N$$

$$F$$

$$Q$$

Εργο

$$0 \quad (\text{δίοτι } N \perp \text{κίνηση})$$

$$0 \quad (\text{δίοτι } F \perp \text{κίνηση}).$$

$$W_Q = - \int Q dx \quad (\text{απο } dy = -dx).$$

Αρχη Εργου Ενέργειας:

$$W_{nc} = \Delta(T+V) = (T_2 + V_2) - (T_1 + V_1).$$

$$\text{Αρα } \underbrace{- \int Q dx}_{W_Q} = (T_2 + V_2) - (T_1 + V_1).$$

Θέση 1: Αρχική $x=0$, $v=v_0$

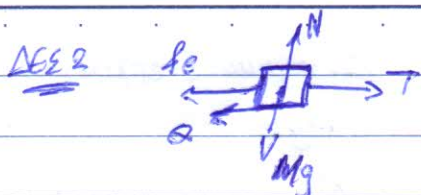
Θέση 2: $x=\delta$, $v=0$.

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} M v_0^2 = \frac{1}{2} (m+M) v_0^2$$

$$T_2 = 0$$

$$V_1 = -mgh + 0 + 0.$$

$$V_2 = \frac{1}{2} k \delta^2 + 0 - mg(h+\delta)$$



Βήμα 2° :

Επίωση κίνησης στην κατακόρυφη διεύθυνση:

$$\underline{F_z = M \ddot{z} = 0} \Rightarrow F_z = 0 \Rightarrow N = Mg$$

Βήμα 3° : Κινηματικός Τελεστής

$$Q = \mu \cdot N \quad (\text{αφού το σύστημα είναι σταθερό})$$

Από το έργο της Q :

$$W_Q = - \int_0^\delta Q dx = - \int_0^\delta \mu Mg dx = - \mu Mg \int_0^\delta dx = - \mu Mg \delta$$

Δεν μπορούμε να βγάλουμε από πάνω το Q
από το ολοκλήρωμα, γιατί δεν ξέρουμε αν είναι σταθερό.

ΟΤΙΟΤΕ : ΑΝΤΙΚΑΘΙΣΤΩΝΤΟΣ

$$- \mu Mg \delta = \frac{1}{2} k \delta^2 - mg(h - \delta) - \left[\frac{1}{2} (m+M) v_0^2 - mgh \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \mu Mg \delta = \frac{1}{2} k \delta^2 - mg \delta - \frac{1}{2} (m+M) v_0^2 \Rightarrow$$

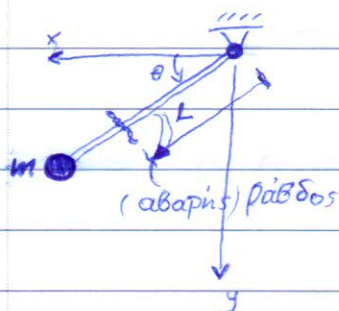
$$\Rightarrow \frac{1}{2} k \delta^2 - (mg - \mu Mg) \delta - \frac{1}{2} (m+M) v_0^2 = 0$$

2 roots

< Θετική
Αρνητική

(επιμύληση &
δυστήρηση)

Εφαρμογή I.

Ξεκινά από τη θέση θ_0 , με αρχική ταχύτητα u .Ζητείται : 1. $v(\theta)$.

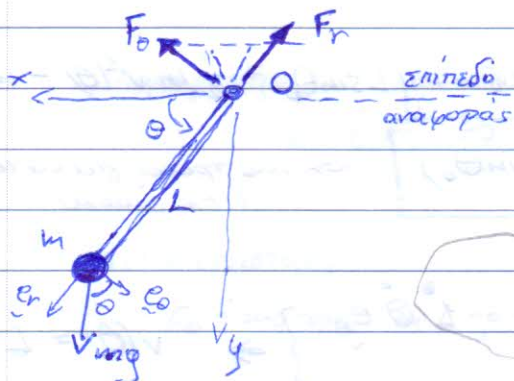
2. Δυνάμεις στη στήριξη.

3. Εσωτερική και εξωτερική ροπή

1) Βήμα 1°

Σύστημα - Περιβάλλον

ΔΕΣ



Με σύστημα ράβδος-μάζα, ζητούμε τις ροπές.

και ροπή

Η δοκός φέρει 2 δυνάμεις ↓

Το καλώδιο μπορεί να βερεί μόνο ~~μια~~ μια αξονική.(η αξονική είναι κατεύθυνση στην κίνηση - δεν παράγει έργο.)
(η ροπή και η τερνούσα παράσχων)

Βήμα 2°

Αρχή Έργου Ενέργειας

Συντηρητικές Δυνάμεις

 mg

Δυναμικό

 mgz

Μη συντηρητικές Δυνάμεις

 F_r F_θ

Έργο

0

0

} το εγχείο εφαρμογής
παράγει έργο.

Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad \omega$$

Θέση 1: Αρχική Θέση, θ_0 , v_0 .

Θέση 2: θ , $v(\theta)$.

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$V_1 = -m g L \sin \theta_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v^2(\theta)$$

$$V_2 = -m g L \sin \theta.$$

Αντικατάσταση στην (1) $\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - m g L \sin \theta_0 = \frac{1}{2} m v^2(\theta) - m g L \sin \theta.$

$$\Rightarrow \boxed{v^2(\theta) = v_0^2 + 2 g L (\sin \theta - \sin \theta_0)}$$

$\Rightarrow$ νέος τρόπος για να το βρούμε (πιο εύκολος)

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \rightarrow \vec{v} = L \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{v} &= v(\theta) \vec{e}_\theta \end{aligned} \Rightarrow v(\theta) = L \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v(\theta)}{L}$$

Άρα: $\ddot{\theta}(\theta) = \frac{v^2}{L^2} = \frac{v_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (\sin \theta - \sin \theta_0).$

Το μέγιστο της $v(\theta)$ είναι στο ίδιο σημείο με το μέγιστο της $\dot{\theta}$.
 $\hookrightarrow$ (Αν το ζητούσε).

(Παραγωγίζοντας το $\dot{\theta}$ θα βρούμε και το $\ddot{\theta}$).

2) Βήμα 2^ο Εξισώσεις κίνησης. (Νόμος Euler)

$$-F_r + m g \sin \theta = -m L \ddot{\theta}$$

$$-F_\theta + m g \cos \theta = m L \ddot{\theta}$$

$\rightarrow$ θεωρούμε ότι ο $\vec{a}_n$ ή μάλλον βρισκόμαστε στο κέντρο του είναι τανυστή στην m και κανονικά νόμο του Νεύτωνα δι' αυτό το υλικό σημείο.

$$\rightarrow F_r = mg \sin \theta + m L \dot{\theta}^2 = mg \sin \theta + m \frac{v_0^2}{L} + 2g(\sin \theta - \sin \theta_0) =$$

$$= m \left[\frac{v_0^2}{L} + g(3 \sin \theta - 2 \sin \theta_0) \right]$$

Η F_r θα είναι μερική στην κατακόρυφη θέση.

$$\underline{F}_\theta = mg \cos \theta - m L \ddot{\theta}$$

$$\text{Ξυνώ από την } \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{L^2} + \frac{2g}{L} (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Παραγωγίζω ως προς t και τα 2 μέλη :

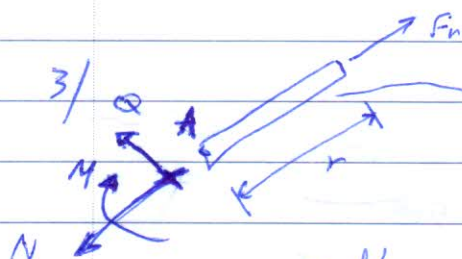
$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{2g}{L} \cos \theta \dot{\theta} \rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{L} \cos \theta$$

Αντικατάσταση

$$F_\theta = mg \cos \theta - m L \frac{g}{L} \cos \theta = 0 \Rightarrow \boxed{F_\theta = 0}$$

Από συνέπεια έχουμε
μόνο στη διεύθυνση
της δύναμης

(η δύναμη εδώ συμπερίεχεται σαν καλώδιο)



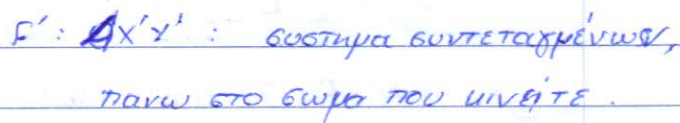
Το σύμα δεν έχει μάζα

Από Νόμος Euler $\rightarrow$ Εξισώσεις Στάτικας

$$\bullet N = F_r$$

$$\bullet Q = 0$$

$$\bullet M = 0 \text{ (πχ ως προς σημείο A)}$$



ΞΕΙΝΑ από κρημία στη ΘΕΣΗ Θ.

Όταν το m θα είναι "περίσπορος", παρα-
 γερει ως το M σε ορισμένες περιπτώσεις.

- Ζητούνται :
1. $v(t) = \frac{\text{μέτρο}}{\text{ταχύτητας στην αρθρωση}}$ (της άρθρωσης)
 2. $u(t) = \frac{\text{μέτρο}}{\text{ταχύτητας του σφαιριού προς m.}}$
 3. Αντιδράσεις στην υαλίσια O
 4. Αντιδράσεις στην αρθρωση A.
 5. Να επαναληφθεί για $\mu \neq 0$ (HW).
- (Υποθέτοντας ότι κινείται)

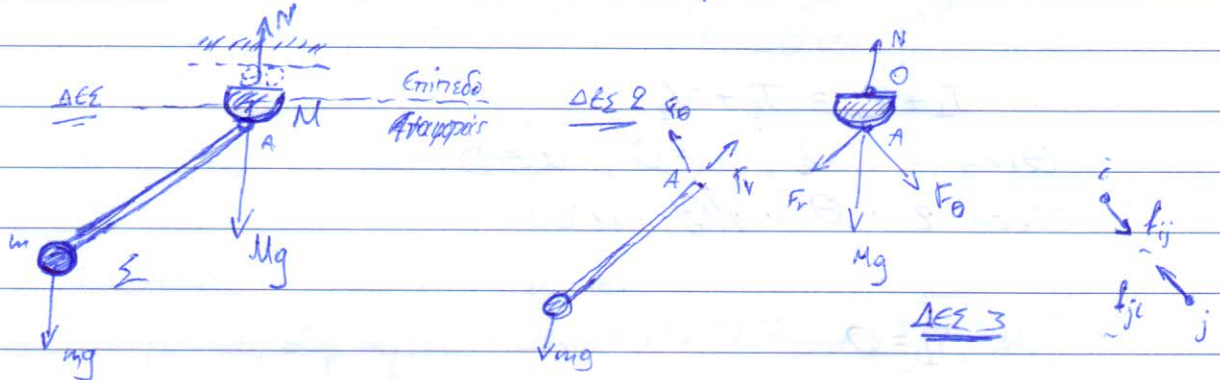


→ 1^o Vopros Euler : ...

- 2^{os} Noçoes Euler: $\sum \tilde{M}_0 = \sum_{i=1}^n \rho_i \times \tilde{h}_i \cdot \tilde{r}_i \rightarrow \tilde{T}_1 R - \tilde{T}_2 R = 0 \rightarrow \boxed{\tilde{T}_1 = \tilde{T}_2}$

Λύση:

Βήμα 1°: Σύστημα - Περιβάλλον / ΔΕΣ.



Εξωτερικές Δυνάμεις είναι: mg , Mg , N .

Εσωτερικές Δυνάμεις: Αλληλεπιδράσεις σωμάτων F_r , F_θ για τα 2 σώματα

Εστω ότι A κινείται απεριοσχεχιστα κατά dr

$$\left. \begin{array}{l} \text{Έργο της } \underline{F_r} : \underline{F_r} \cdot d\underline{r} \\ \text{Έργο της } -\underline{F_r} : -\underline{F_r} \cdot d\underline{r} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Συνολικό έργο της } \underline{F_r} \text{ και } -\underline{F_r} \\ \underline{F_r} d\underline{r} - \underline{F_r} \cdot d\underline{r} = 0 \end{array}$$

και παρατηρούμε να ήταν τα σώματα θα ίσχυε απορριψόμε το έργο των F_r , F_θ .

Βήμα 2°: Αρχή Έργου Ενέργειας

Συστηματικές Δυνάμεις

mg

Mg

Δυνάμεις

mg_z

Mg_z

Μη συστηματικές Δυνάμεις

N

$F_r, -F_r, F_\theta, -F_\theta$

στοις απαγορευμένα
σώματα

Έργο

○ (δυσ $N \perp$ κίνηση)

○ (είναι παύση στην αλληλεπίδραση)
το άθροισμά τους

○ (η αλληλεπίδραση είναι μέσα στο σύστημα)

$W_{nc} = 0 \Rightarrow$ Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Θέση 1: $\theta_0, v_0 = 0, u_0 = 0$

Θέση 2: $\theta, v(\theta), u(\theta)$

$$T_1 = 0$$

$$V_1 = -mgL \sin \theta_0$$

$$T_2 = \frac{1}{2} M \dot{v}^2(\theta) + \frac{1}{2} m u^2(\theta)$$

$$V_2 = -mgL \sin \theta$$

Αντικαθιστώντας στην (1).

$$-mgL \sin \theta_0 = \frac{1}{2} M \dot{v}^2(\theta) + \frac{1}{2} m u^2(\theta) - mgL \sin \theta \quad \left(\begin{array}{l} \text{2 άγνωστοι} \\ u(\theta), v(\theta) \end{array} \right)$$

Αρχή Διατήρησης Ορμής στη Διεύθυνση x.

$$L_{x,1} = L_{x,2}$$

$$0 = M \cdot v(\theta) + m \cdot u_x \quad (2)$$

Σχετική κίνηση.

$$\underline{\underline{v_A}} = v(\theta) \underline{\underline{e_x}}$$

$$\underline{\underline{u_{A/F}}} = \underline{\underline{u_A}} + \underline{\underline{u_{Σ/F'}}} = v(\theta) \underline{\underline{e_x}} + \dot{r} \underline{\underline{e_r}} + r \dot{\theta} \underline{\underline{e_\theta}}$$

$$= v(\theta) \underline{\underline{e_x}} + L \dot{\theta} \underline{\underline{e_\theta}}$$

→ σχετική

Πρέπει να αναχω το ένα σύστημα στο άλλο: $\underline{\underline{e_\theta}} = -\sin \theta \underline{\underline{e_x}} + \cos \theta \underline{\underline{e_y}}$

$$\underline{\underline{u_{A/F}}} = v(\theta) \underline{\underline{e_x}} + L \dot{\theta} (-\sin \theta \underline{\underline{e_x}} + \cos \theta \underline{\underline{e_y}})$$

$$\rightarrow \underline{\underline{u_{A/F}}} = [v(\theta) - L \dot{\theta} \sin \theta] \underline{\underline{e_x}} + L \dot{\theta} \cos \theta \underline{\underline{e_y}}$$

Επομένως :

$$u^2(\theta) = (v(\theta) - L\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (L\dot{\theta}\cos\theta)^2 \quad (3)$$

$$\text{και : } u_x = v(\theta) - L\dot{\theta}\sin\theta \quad (4)$$

Αντικαθιστώ την (3), (4) στην (1) και (2):

(1)

$$(1) \Rightarrow -mgL\sin\theta = \frac{1}{2}m[(v(\theta) - L\dot{\theta}\sin\theta)^2 + (L\dot{\theta}\cos\theta)^2] + \frac{1}{2}Mv^2(\theta) - mgL\sin\theta$$

$$(2) \Rightarrow 0 = Mv(\theta) + m[v(\theta) - L\dot{\theta}\sin\theta]$$

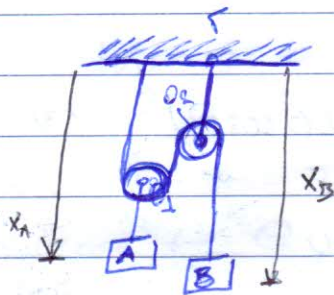
Σύστημα 2 εξισώσεων με 2 άγνωστους $v(\theta)$, $\dot{\theta}$.

Παρατήρηση :

$$(3) \Rightarrow u^2(\theta) = v^2(\theta) - 2L\dot{\theta}v(\theta)\sin\theta + \underbrace{L^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta + L^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}_{L^2\dot{\theta}^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = L^2\dot{\theta}^2}$$

$$\Rightarrow u^2(\theta) = v^2(\theta) - 2L\dot{\theta}v(\theta)\sin\theta + L^2\dot{\theta}^2$$

9/11/2018.



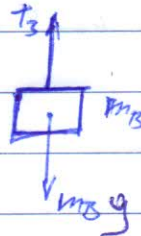
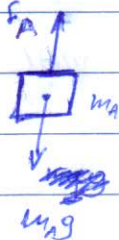
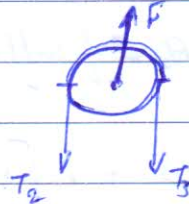
Επιταχύνσεις $a_A, a_B = ?$

Δίνονται m_A, m_B .

Άβαρες τροχαλίες.

Βήμα 1ο:

ΔΕΣ



Βήμα 2ο:

$m=0$? (μεινεται)

• ΔΕΣ Τροχαλίας A: $\sum F_x = 0$

1ος Νόμος Euler $\rightarrow F_A - T_1 - T_2 = 0$

$\sum M_{O1} = 0$

2ος Νόμος Euler $\rightarrow T_1 R - T_2 R = 0 \rightarrow$

$\Rightarrow T_1 = T_2 = T$

Αρα $F_A - 2T = 0 \rightarrow \boxed{F_A = 2T}$

• ΔΕΣ Τροχαλίας B: $T_3 = T_2 = T$

• ΔΕΣ A: ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΙΝΗΣΗΣ:

$-F_A + m_A g = m_A \ddot{x}_A \rightarrow \boxed{-2T + m_A g = m_A \ddot{x}_A} \quad (1)$

Δες B: Εξίσωση κίνησης

$$-T + m_B g = m_B \ddot{x}_B \Rightarrow \boxed{-T + m_B g = m_B \ddot{x}_B} \quad (2)$$

Βήμα 3° Κινηματικές Περιγραφές

Μήκος Καλωδίου: $L = (x_A - 0_A A) + \pi R + (x_A - 0_A A - 0_2 \Gamma) + \pi R + (x_B - 0_2 \Gamma)$
παράγισμα

$$\Rightarrow L = 2x_A + x_B + c \Rightarrow \boxed{0 = 2\ddot{x}_A + \ddot{x}_B} \quad (3)$$

Βήμα 4° Επίλυση

$$(3) \Rightarrow \ddot{x}_B = -2\ddot{x}_A$$

$$(1) \Rightarrow -2T + m_A g = m_A \ddot{x}_A$$

$$(2) \Rightarrow -T + m_B g = 2m_B \ddot{x}_A$$

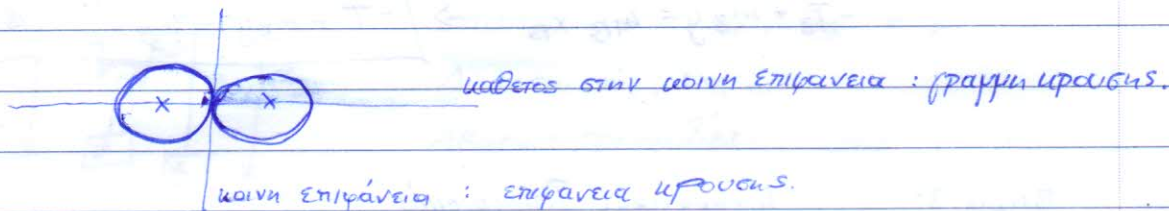
πολ/ζω ~~(2)~~ x (2) και προσθετω
εξισώσεις κατά μέλη

$$\Rightarrow \boxed{(m_A - 2m_B)g = (m_A + 4m_B)\ddot{x}_A}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x}_A = \frac{m_A - 2m_B}{m_A + 4m_B} g}$$

Άρα: $\ddot{x}_B = -2\ddot{x}_A = \boxed{-2 \frac{m_A - 2m_B}{m_A + 4m_B} g}$

~ Κρούση Υαλίν Σφαιρών ~



Κεντρική - Ευκέντρα.

- Αν τα κέντρα των 2 σφαιρών περνούν πάνω στη γραμμή κρούσης : κεντρική κρούση
- Αλλιώς : ευκέντρα κρούση.

Ευθεία - Πλάγια

- Ευθεία : ταχύτητες των σφαιρών, να συμπίπτουν με τη γραμμή κρούσης.
- Αν μια από τις ταχύτητες, δεν συμπίπτει : πλάγια

Ευθεία | Κεντρική Κρούση

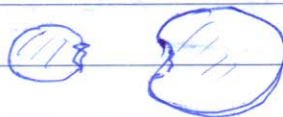


~~XXXXXXXXXXXX~~



Φαινόμενο .

Ταπεινά τα σώματα παραμορφώνονται



σώματα που παραμορφώνονται



Μετά την κρούση (ελαστική κρούση)

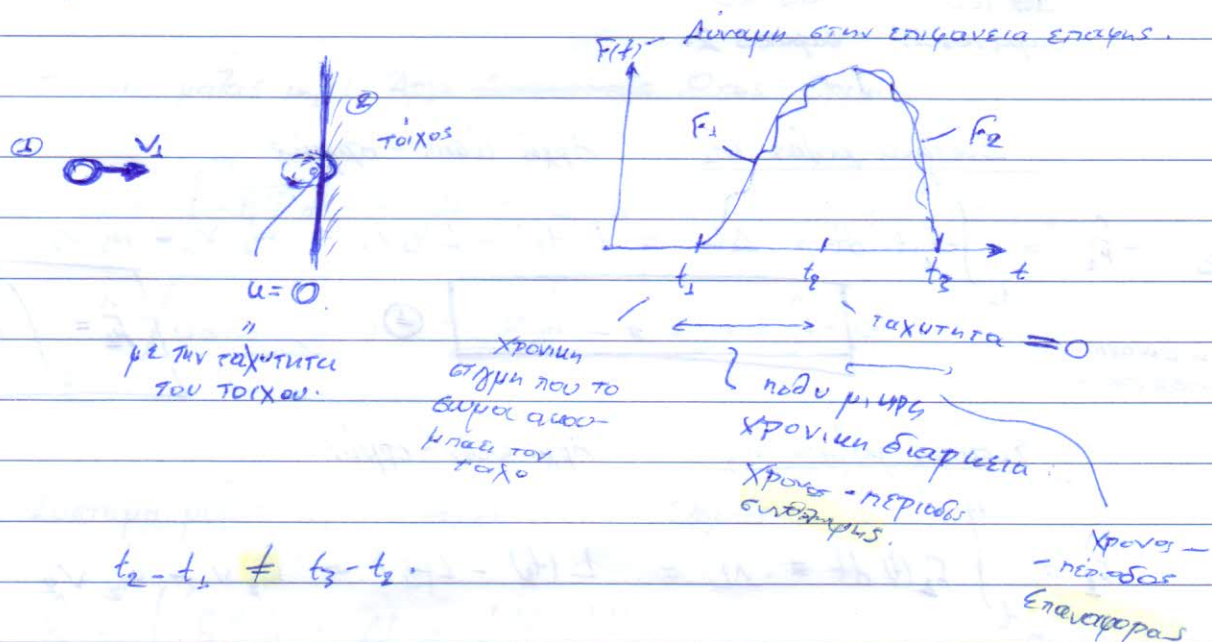
Το μηχανικό έργο το φάνηκε πώς. Δεν μετατρέπεται σε άλλη μορφή ενέργειας (πχ θερμότητα).

Αν το σώμα μείνει παραμορφωμένο $\rightarrow$ πλαστική κρούση.
 $\hookrightarrow$ μετά την κρούση.

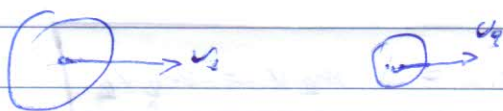
(της ενέργειας)

- Μεταβολή του έργου πριν και μετά της κρούσης : έργο που χρειάζεται για να παραμορφώσω έτσι το σώμα.

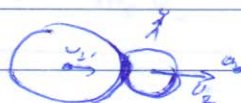
Εφαρμογή : Κίνηση ράβας σε τοίχο.



Εφαρμογή : Κίνηση 2 σφαιρών.



Παρατηρήσεις κινούμενων

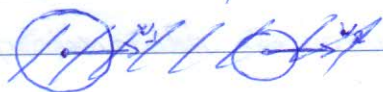


$$u_1' - u_2' = 0 \rightarrow u_1' = u_2' = u$$

απόλυτη ταχύτητα $\perp$ απόλυτη ταχύτητα $\perp$ $\rightarrow$ η σχετική είναι 0. (όπως πριν)

Αρα την t_2 : οι ταχύτητες των σφαιρών είναι ίδιες. $= v$

- Περίοδος συνθίξεως $[t_1, t_2]$



$\longrightarrow x$ (Θετική κατεύθυνση)



Πρώτη συνθήκη



ΔΕΕ του
σώματος 1. ΔΕΕ του
σώματος 2.

Με ενδιαφέρον μόνον α διαφέρει κατά τη
διεύθυνση της κρούσης. (Διεύθυνση x μόνον).

Σύστημα μάζας m_1 : Αρχή ώσης - ορμής

$$\hat{O}_{\text{ση}} : -\hat{F}_1 = \int_{t_1}^{t_2} -F_1(t) dt = \Delta L = L(t_2) - L(t_1) = m_1 v - m_1 v_1$$

ή δύναμη
κατεύθυνση $-x$

$$\Rightarrow \boxed{-\hat{F}_1 = m_1 v - m_1 v_1} \quad (1)$$

$$\text{ενώ } \boxed{\hat{F}_2 = \int_{t_1}^{t_2} F_2(t) dt}$$

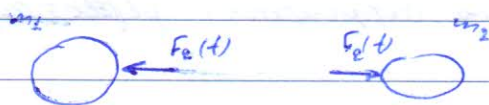
Σύστημα μάζας m_2 : Αρχή ώσης - ορμής

$$\hat{F}_2 = \int_{t_1}^{t_2} F_2(t) dt = \Delta L = L(t_2) - L(t_1) = m_2 v - m_2 v_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{F}_2 = m_2 v - m_2 v_2} \quad (2)$$

$$\text{'Αρα: } \boxed{\hat{F}_1 = m_1 v_1 - m_1 v = m_2 v - m_2 v_2}$$

Περίοδος επαναφοράς $[t_2, t_3]$



$\Delta \mathcal{E}$ του
σωμ. 1

$\Delta \mathcal{E}$ του
σωμ. 2

Σύστημα μάζας m_1 : Αρχή ~~Αντιστοίχιας~~ Cons - Oppus

$$-\hat{F}_2 = \int_{t_2}^{t_3} -F_2(t) dt = \Delta L = L(t_3) - L(t_2) = m_1 u_1 - m_1 v_1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{-\hat{F}_2 = m_1 u_1 - m_1 v} \quad (3)$$

Σύστημα μάζας m_2 : Αρχή Cons - Oppus

$$\hat{F}_2 = \int_{t_2}^{t_3} F_2(t) dt = \Delta L = L(t_3) - L(t_2) = m_2 u_2 - m_2 v \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{F}_2 = m_2 u_2 - m_2 v} \quad (4)$$

Άρα:

$$\hat{F}_2 = m_1 v - m_1 u_1 = m_2 u_2 - m_2 v$$

Εισάγω έναν συντελεστή : τον καλούμε συντελεστή επαναφοράς.

$$e = \frac{\hat{F}_2}{\hat{F}_1}$$

(5)

, προσδιορίζεται πειραματικά.

(υλικό, θερμοκρασίες, μέγεθος αγκύλων, ταχύτητες).

Εστώ ότι γνωρίζω το e .

Οι αγκύλωτοι είναι : $\hat{F}_1, \hat{F}_2, u_1, u_2, v$

- Θέλουμε να γράψουμε το e , ως συνάρτηση των ταχυτήτων πριν και μετά την υρούση.

$$e = e(u_1, u_2, v_1, v_2) ?$$

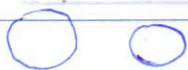
$$e = \frac{\hat{F}_2}{\hat{F}_1} \stackrel{(3)}{=} \frac{m_1 u_1 - m_1 v}{m_1 v + m_2 u_1 - m_1 v_1} = \frac{u_1 - v}{v - v_1} \quad (6)$$

και $e = \frac{\hat{F}_2}{\hat{F}_1} \stackrel{(4)}{=} \frac{m_2 u_2 - m_2 v}{m_2 v - m_2 v_2} = \frac{u_2 - v}{v - v_2} \quad (7)$

(6,7) - Σύστημα δύο ελαστικών με 2 αγκύλωτους.

Αναδοίρω v από τις (6), (7).

$$\Rightarrow e = - \frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \quad (8)$$



$\leadsto$ οι εσωτερικές δυνάμεις είναι 0.

ΔΕΕ για το
σύστημα των
2 μαζών

$$\frac{0}{\text{cm}} = \int_{t_1}^{t_3} \text{Εσωτερικών Συνάψεων } dt = 0 \rightarrow \text{Αρχή Διατήρησης ~~Συνάρτησης~~ Ορμής (Λύκειο)}$$

$$\text{Αρα } L(t_3) = L(t_1) \Rightarrow m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (9)$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Εναλλακτικά:} \\ \left. \begin{array}{l} \text{Συνδίαζω } (1), (2) \\ \text{Συνδίαζω } (3), (4) \end{array} \right\} \text{αναλογία του } v. \\ \downarrow \\ \text{Εξίσωση 9} \end{array} \right]$$

Σοβαρές Εξισώσεις

(8), (9), αποτελούν δύο εξισώσεις με αγνώστους u_1, u_2 . $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow u_1 = \frac{(m_1 - e m_2) v_1 + (1 + e) m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

(*)

$$u_2 = \frac{(1 + e) m_1 v_1 + (m_2 - e m_1) v_2}{m_1 + m_2}$$

Επίσης από τις (1) - (5), προκύπτουν: $\hat{F}_1, \hat{F}_2, v$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{(1) \wedge (2)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(3) \wedge (4)} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{(1) \wedge (5)}$

Μεταβολή Ενέργειας κατά την κρούση:

$$\Delta E = E_{\text{πριν}} - E_{\text{μετά}} = T_{\text{πριν}} - T_{\text{μετά}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} m_1 u_1^2 - \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

η μεταβολή της δυναμικής ενέργειας είναι μηδέν.

Τυπώσουμε ότι $\Delta E \geq 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow 0 \leq e \leq 1$

12/11/2019.

κρούση

$$\Delta E = T_{\text{πριν}} - T_{\text{μετά}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u_2^2) \geq 0 \quad (10)$$

$$\Delta E \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq e \leq 1$$

1) για $e=1$

$$(8) \rightarrow e = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \rightarrow u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1)$$

$$\rightarrow u_2 + e v_2 = u_1 + e v_1$$

$$\boxed{e=1} \rightarrow u_2 + v_2 = u_1 + v_1$$

$$(9) \rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2 \rightarrow m_2 (u_2 - v_2) = -m_1 (u_1 - v_1)$$

πολλαπλασιάζω
μετα μέλη

$$\rightarrow m_2 (u_2^2 - v_2^2) = -m_1 (u_1^2 - v_1^2) \xrightarrow{\times 1/2}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_2 (u_2^2 - v_2^2) + \frac{1}{2} m_1 (u_1^2 - v_1^2) = 0$$

Απόδειξη ενέργειας κατά την κρούση:

$$(10) \rightarrow \boxed{\Delta E = 0}, \text{ για } \underline{e=1} \quad \text{Ελαστική κρούση.}$$

2. Για $e=0$: (τέλεια πλαστική κρούση).
(όλες οι κρούσεις είναι πλαστικές).

$$(8) \Rightarrow e = -\frac{u_2 - u_1}{v_2 - v_1} \Rightarrow \begin{cases} u_2 - u_1 = -e(v_2 - v_1) \\ \text{Εάν } e=0 \end{cases} \Rightarrow u_2 - u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$$

Ταχύτητες των 2 σωμάτων μετά την κρούση είναι ίδιες.

Για $e=0$

$$\textcircled{*} \Rightarrow u_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = u_2 = u$$

Απώλεια ενέργειας κατά την κρούση:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u^2) + \frac{1}{2} m_2 (v_2^2 - u^2) = \text{αντικατάσταση του } u. \quad \textcircled{H/W}$$

$$= \text{μια συνάρτηση του } v_1 \text{ και } v_2 > 0 \quad (\text{Θα είναι η μεγίστη απώλεια ενέργειας κατά την κρούση})$$

$$0 \leq e < 1 \rightarrow \Delta E > 0$$

Βασικά η απώλεια ενέργειας εξαρτάται από το e .

κ/ω

Άσκηση:

• Για $0 \leq e < 1$, να βρείτε την απώλεια ενέργειας ΔE συνάρτηση των v_1, v_2 και των μαζών, στην περίπτωση που:

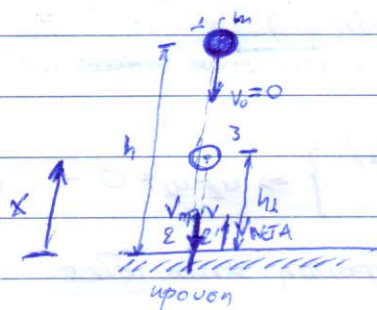
στην {

1. $m_1 = m_2 = m$
2. $v_2 = -v_1$, $|v_2| = |v_1| = v$, $m_1 = m_2 = m$.

διαχωρισμό? {

3. $v_2 = -v_1$, $m_1 \neq m_2$ (δίνεται πριν την ε)
4. $v_2 = 0$
5. $v_2 = 0$, $m_2 \gg m_1$.

Εφαρμογή



Μπολά αφήνεται από h , αναπηδά και φθάνει σε υψος h_1 .

Να βρείτε:

1. Με δεδομένα τα h και h_1 , να προσδιορίσετε το e .

2. Ο χρόνος που απαιτείται για το σώμα να σταματήσει τις αναπηδήσεις.

Εξετάζω 3 περιπτώσεις κίνησης (η 1^η και η 3^η είναι ίδιες περιπτώσεις).

I. κίνηση ① → ②

II. κρούση

III. κίνηση ② → ③



I.

ΔΕΣ:



(ΑΔΜΕ) Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \quad (1)$$

Θέση 1: $x = h$, $v_1 = v_0 = 0$

Θέση 2: $x = 0$, $v_2 = -v_{μπiv}$

$$(1) \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot 0^2 + mgh = \frac{1}{2} m v_{μπiv}^2 + mg \cdot 0 \Rightarrow v_{μπiv} = \sqrt{2gh}$$

III. ΔΕΣ:



ΑΔΜΕ: $T_2 + V_2 = T_3 + V_3$

$$\frac{1}{2} m v_{μετα}^2 + 0 = 0 + mgh_1 \rightarrow v_{μετα} = \sqrt{2gh_1}$$

($v_2 = v_{μετα}$)

II. Κρούση

$$(8) \rightarrow e = \frac{-(u_2 - u_1)}{v_2 - u_1} \Rightarrow e = -\frac{u_1}{v_1} \quad \begin{array}{l} u_1 = +v_{\text{μετα}} \\ v_1 = -v_{\text{πριν}} \end{array}$$

όπου $u_2 = v_2 = 0$ (τοίχος)

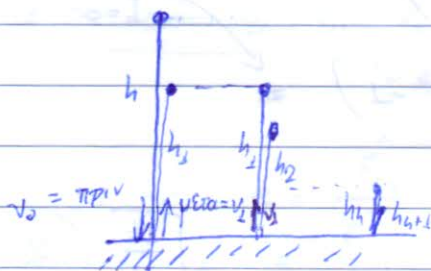
$$\Rightarrow e = \frac{v_{\text{μετα}}}{v_{\text{πριν}}}$$

Οπότε $v_{\text{πριν}} = \sqrt{2gh}$
 $v_{\text{μετα}} = \sqrt{2gh_1}$

$$e = \frac{v_{\text{μετα}}}{v_{\text{πριν}}} = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{h_1}{h}} \rightarrow e = \sqrt{\frac{h_1}{h}}$$

Επειδή $h_1 \leq h \Rightarrow e \leq 1$

2.



$$\frac{v_{\text{μετα}}}{v_{\text{πριν}}} = e \Rightarrow \frac{v_1}{v_0} = e$$

$$\frac{v_{h+1}}{v_h} = e \Rightarrow v_{h+1} = e v_h = e^2 v_{h-1} = \dots = e^{h+1} v_0$$

$$\rightarrow v_{h+1} = e^{h+1} v_0 \quad \text{ή} \quad v_h = e^h \cdot v_0 \quad (\text{ή με επαγωγή})$$

Ο χρόνος $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

απόδειξη

$$t_h = \left(2\right) \frac{v_h}{g}$$

Χρόνος να παει από το χαμηλότερο στο υψηλότερο σημείο.

Στην η-οδη απαντάμε ο χρόνος.

$$t_1 = 2 \frac{v_0}{g}$$

Συνολικός χρόνος $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sum_{n=1}^{\infty} t_n =$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2v_0}{g} =$$

?

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^n v_0}{g} =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2v_0}{g} \sum_{n=1}^{\infty} e^n =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{2\sqrt{2gh}}{g} \sum_{n=1}^{\infty} e^n$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} e^n + 1 \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(2 \sum_{n=0}^{\infty} e^n - 1 \right) =$$

$$= \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(2 \frac{1+e}{1-e} - 1 \right) = \sqrt{\frac{2h}{g}} \left(2 \frac{1-e}{1-e} - 1 \right)$$

$$= \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

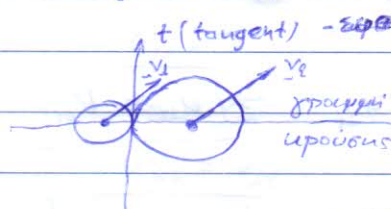
απλός χρόνος.

για $e = \frac{1}{2} \approx 3 \times$ απλός χρόνος

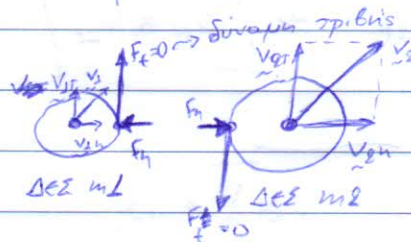
Pathfinder

13/11/2012

~ Πλάγια Κεντρική Κρούση ~



n (normal) - κάθετη



• v : πριν την κρούση

• Μετά την κρούση: u_1, u_2

u_{1h}, u_{1t} u_{2h}, u_{2t}

Υποθέτω ότι οι δυνάμεις τριβής είναι μικρές σε σχέση με τις δυνάμεις κρούσης. (ή ο συντελεστής τριβής είναι ^{μικρόν} ~~μικρό~~)

$$F_t = 0$$

Οι εξισώσεις (1)-(5) της ευθείας κρούσης ισχύουν και για την πλάγια κρούση. Εναν αλληλεπίδραση τα u_1, u_2, v_1, v_2 των εξισώσεων της ευθείας κρούσης με τα $u_{1h}, u_{2h}, v_{1h}, v_{2h}$ της πλάγιας κρούσης.

→ προβολή των ταχυτήτων στην διεύθυνση n .

$$(5) \rightarrow e = \frac{\hat{F}_{h2}}{\hat{F}_{h1}} \quad \begin{matrix} \sim \text{επανάστροφ} \\ \sim \text{συνθλίψη} \end{matrix} \quad (5)$$

$$e = - \frac{u_{2h} - u_{1h}}{v_{1h} - v_{2h}} \quad (8)$$

$$m_1 v_{1h} + m_2 v_{2h} = m_1 u_{1h} + m_2 u_{2h} \quad (9)$$

⇒

$$\begin{aligned} u_{1h} &= \frac{(m_1 - e m_2) v_{1h} + (1 + e) m_2 v_{2h}}{m_1 + m_2} \\ u_{2h} &= \frac{(1 + e) m_1 v_{1h} + (m_2 - e m_1) v_{2h}}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

(*)

$F_t = 0 \Rightarrow$ Γίνεται η από διατήρησης ορμής στη διεύθυνση t .

ΝΕΣ 1: $m_1 v_{1t} = m_2 u_{1t} \Rightarrow \boxed{u_{1t} = v_{1t}}$

(**)

ΝΕΣ 2: $m_2 v_{2t} = m_2 u_{2t} \Rightarrow \boxed{u_{2t} = v_{2t}}$

Ειδική περίπτωση:

1. $m_1 = m_2 = m$, $v_{2t} = 0$.

Γνωρίζουμε την $\vec{v}_{1t} \Rightarrow \vec{v}_{1n}, \vec{v}_{1t}$.

0. Από την (*)

$$u_{1n} = \frac{(m - em) v_{1n} + (1 + e) m v_{2n}}{m + m} = \frac{(1 - e) v_{1n}}{2} = \frac{1 - e}{2} v_{1n}.$$

$$u_{2n} = \frac{(1 + e) m v_{1n} + (m - em) v_{2n}}{m + m} = \frac{1 + e}{2} v_{1n}.$$

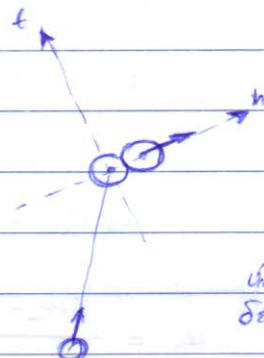
Από $u_{1n} = \frac{1}{2} (1 - e) v_{1n}$

$$u_{2n} = \frac{1}{2} (1 + e) v_{1n}$$

0. Από την (**)

$$u_{1t} = v_{1t}$$

$$u_{2t} = v_{2t} = 0.$$



Ολική ενέργεια,
δεν μετατρέπεται

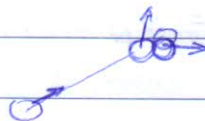
Περίπτωση 1: $e=1$

$$u_{1h} = 0$$

$$u_{2h} = v_{1h}$$

$$u_{1t} = v_{1t}$$

$$u_{2t} = 0$$



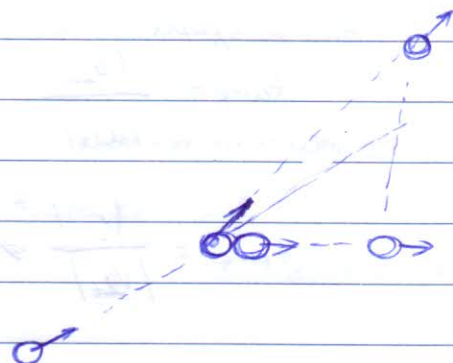
Περίπτωση 2: $e=0$

$$u_{1h} = \frac{1}{2} v_{1h}$$

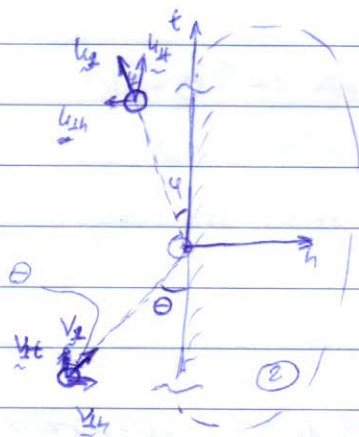
$$u_{2h} = \frac{1}{2} v_{1h}$$

$$u_{1t} = v_{1t}$$

$$u_{2t} = 0$$



2. $m_2 \gg m_1$ (σώμα 2 είναι τοίχος) και $v_2 = 0$.



$$u_{1h} = \frac{(m_1 - e m_2) v_{1h} + 0}{m_1 + m_2} \quad \text{όσο } e \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned} e \neq 0 &= \frac{-e m_2 v_{1h}}{m_2} = -e v_{1h} \Rightarrow u_{1h} = -e v_{1h}, \text{ για } e \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e = 0 &= \frac{m_1 v_{1h}}{m_2} \Rightarrow u_{1h} = \frac{m_1}{m_2} v_{1h}, \text{ για } e = 0 \\ &\quad \text{ (σχεδόν μηδέν.} \end{aligned}$$

$$u_{2h} = \frac{(1+e) m_1 v_{1h} + 0}{m_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) (1+e) v_{1h} \Rightarrow \boxed{u_{2h} = \frac{m_1}{m_2} (1+e) v_{1h}} \quad \text{, όσο } e \rightarrow 1.$$

$$\text{Επειδή } m_2 \gg m_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

(*) $\Rightarrow u_H = V_H$
 $u_{2H} = v_{2H} = 0.$

Απο το σχημα

$$\tan \varphi = \frac{|u_{1H}|}{|u_{2H}|} = \frac{|-e v_{1H}|}{|v_{1H}|} = e \frac{|v_{1H}|}{|v_{1H}|} \stackrel{e \leq 1}{\leq} \frac{|v_{1H}|}{|v_{1H}|} = \tan \theta$$

$\tan \theta = \frac{|v_{1H}|}{|v_{1H}|}$ Αρα $\tan \varphi \leq \tan \theta \Rightarrow \varphi \leq \theta$
 (Αν $e=1: \varphi=\theta$).

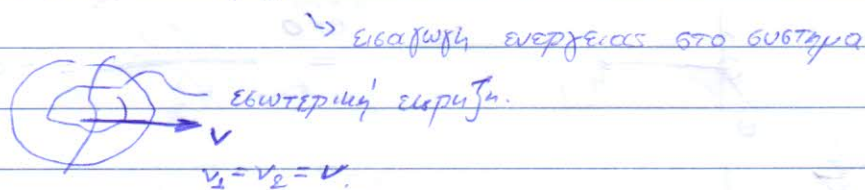
Όταν $e=0$

$$u_{1H} = \frac{m_1}{m_2} V_{1H}$$

$$u_{2H} = \frac{m_2}{m_2} V_{1H}$$

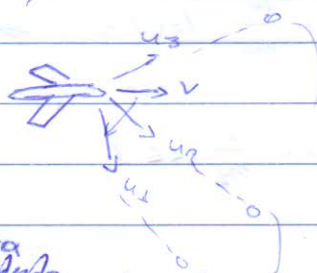
$$\tan \varphi = \frac{|u_{1H}|}{|u_{2H}|} = \frac{m_1 |V_{1H}|}{m_2 |V_{1H}|} = \frac{m_1}{m_2} \tan \theta \rightarrow 0.$$

Κρούση - Εκρηξή



Μεταβολή της ενέργειας κατά την εκρηξή

$$\Delta E = T_{\text{μετα}} - T_{\text{πριν}} \geq 0.$$



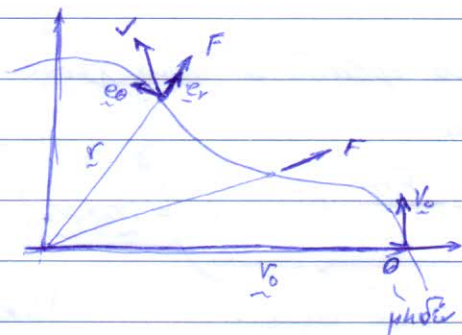
Αρχή Διατήρησης Ορμής
 Αρχή Εργού Ενέργειας

ολα τα βλήματα
 γυρνουν παραπληρω
 προς το έδαφος

για το συνολικό σύστημα
 (δεν ερχομε εξωτερικες
 δυνάμεις)

Κεντρικές Δυνάμεις - Διατήρηση μηχανικής

(όχι)



Ο φορέας της F , περνάει πάντα από το O .

Πολικό σύστημα συντεταγμένων

$$\bullet \underline{F} = F(r) \underline{e}_r \quad \left\{ \begin{array}{l} F(r) > 0 \text{ απωστική} \\ F(r) < 0 \text{ ελκτική} \end{array} \right.$$

Νόμοι του Κεπλέρ: • η κίνηση του σώματος είναι ελλειπική (ελλειψή ή παραβολή)
• διαανεί ίδιες επιφανείες σε ίδιους χρόνους.

Βήματα:

- ① ΔΕΣ
- ② Εξισώσεις Κίνησης

$\underline{M}_O = \underline{0} \Rightarrow$ Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

$$\underline{H}_O = \text{σταθερή} = \underline{r} \times m \underline{v} = \underline{r}_O \times m \underline{v}_O$$

(μήδευ)

ιδιότητα
εξωτερικών
γινόμενων

Ορίζω το ανηγμένο διάνυσμα στροφορμής

$$\underline{h}_O = \frac{\underline{H}_O}{m} \Rightarrow \underline{h}_O = \underline{r} \times \underline{v} = \underline{r}_O \times \underline{v}_O \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \underline{r} \perp \underline{h}_O \\ \underline{v} \perp \underline{h}_O \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ η τροχή είναι επίπεδη και το επίπεδο της τροχιάς συμπεριλαμβάνει το O .

- Κεντρικές Δυνάμεις -

Αποδεικνύεται:

1. Επίπεδη τροχιά

2. Η αυτίνα ΟΣ, διαρρηί 160 ερβαδα σε 16005 χρονοος.

3. Η εἴδωγη τῆς τροχιάς εἶναι

(r=r(θ))

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = - \frac{F(r)}{m h_0^2} r^2, \quad h_0 = |\vec{r}_0 \times \vec{v}_0|$$

4. Εάν $F(r)$ προέρχεται από πεδίο βαρύτητας, δηλαδή: $F(r) = -G \frac{mM}{r^2}$, τότε μπορούμε να βρούμε την $r(\theta)$.

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

όπου

$$p = \frac{h_0^2}{GM}, \quad e = \frac{u_0 h_0^2}{GM}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h_0^2}$$

Εάν η τιμή του e , καθορίζει την τροχιά.

Ελλειπτική εάν $-1 < e < 1$.

Παράβολική εάν $e = 1 \Rightarrow$ ταχύτητα διαφυγής.

Υπερβολική εάν $|e| > 1$

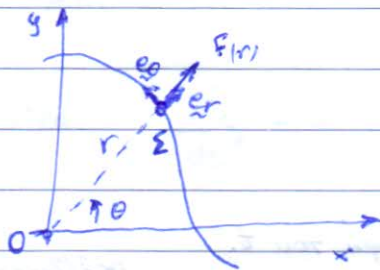
- Αυτίνα πρνεται εάν $e = -1$

Διατηρήσια φέρρι και τῆς τροχιάς.

Δευτέρα: 6⁰⁰ προβλήματα

16/11/2011

2. $\underline{h_0} = \underline{r} \times \underline{v}$



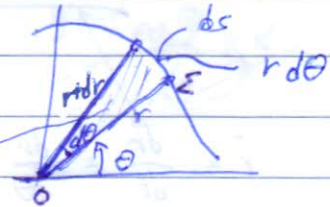
η.ε.ε.

$$h_0 \underline{e_z} = (\underline{r} \underline{e_r}) \times (\dot{\underline{r}} \underline{e_r} + r \dot{\theta} \underline{e_\theta}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_0 \underline{e_z} = \underbrace{r \dot{r} \underline{e_r} \times \underline{e_r}}_0 + \underbrace{r^2 \dot{\theta} \underline{e_r} \times \underline{e_\theta}}_{\underline{e_z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_0 \underline{e_z} = r^2 \dot{\theta} \underline{e_z} \Rightarrow \boxed{h_0 = r^2 \dot{\theta}} \quad (*)$$

$$h_0 = r^2 \dot{\theta} = r r \dot{\theta} = r \cdot r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$



Το τρίγωνο τείνει να έχει εμβαδόν

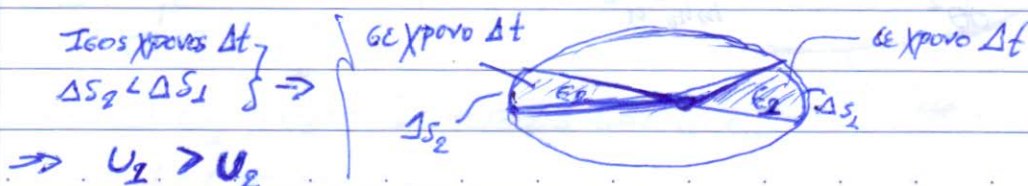
$$\frac{1}{2} (r d\theta) r = \frac{1}{2} r^2 d\theta = dA.$$

Αρα $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \quad (*)$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{h_0}{2}} = \text{σταθερό} \quad (\text{η μεταβολή του εμβαδού}).$$

Οπότε $\Rightarrow \Delta A = \frac{h_0}{2} \Delta t$

$\Rightarrow$ Η ακτίνα OS , βαρύνει ίσες εμβαδά, σε ίσους χρόνους.



3. Εξισώσεις Κίνησης

γνωστό $\leftarrow F_{\theta} = 0$

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad (1)$$

$$F_{\theta} = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \quad (2)$$

Απαιτήσεις $r(t)$, $\theta(t)$.

Ζητείται $r(\theta)$: απαλοιφή του t .

συντηρητικό με r .

Παρατηρώ ότι: $(2) \rightarrow 0 = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = \text{σταθερό}} \quad \text{ή} \quad \boxed{r^2\dot{\theta} = h_0}$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta} \frac{h_0}{r^2}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{h_0}{r^2} \right) = -\frac{h_0^2}{r^3} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Αντικαθιστώ στην (1) το $\ddot{r}$ και $\dot{\theta}$, προκύπτει:

$$\boxed{\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{F(r)r^2}{mh_0^2}}$$

Εξίσωση της τροχιάς

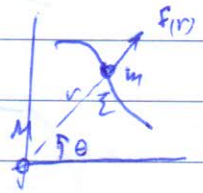
$\leftarrow r(\theta)$

Θέτω $u = \frac{1}{r}$:

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{F(u)}{mh_0^2 u^2}$$

4. Ειδική Περίπτωση: $F(r)$ είναι δυνάμει βαρύτητας.

$$F(r) = -G \frac{mM}{r^2} \rightarrow -\frac{F(r) \cdot r^2}{m h_0^2} = \frac{GM}{h_0^2}$$



Αρα: $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h_0^2}$

Γραμμική Διαφορική Εξίσωση
2ης τάξης (Εξάθετος Συντελεστής)

Λύση

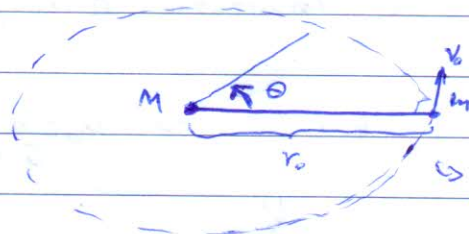
• Εάν $-1 < e < 1$ τότε

$$1 + e \cos \theta \neq 0$$

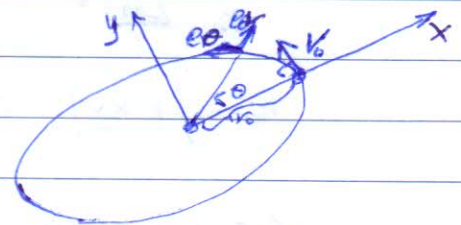
$$(e \cos \theta) (e \cos \theta)$$

το $r(\theta)$ έχει πεπεσμένη τιμή $\forall \theta$.

Αποδεικνύεται ότι η τροχιά $r(\theta)$ είναι ελλειψη.



Ακτίνα κατεύθυνση ταχύτητας



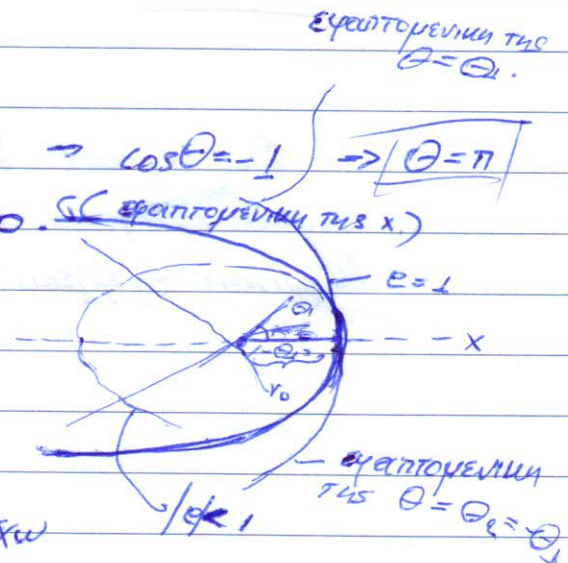
Η τροχιά είναι κυκλική τροχιά, όταν $r(\theta) = \text{σταθερό}$

Αυτό συμβαίνει όταν $e=0$ και η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $r = \rho = \frac{h_0^2}{GM}$.

• Εάν $e=1 \rightarrow$

$$\rightarrow 1 + e \cos \theta = 0 \rightarrow 1 + \cos \theta = 0 \rightarrow \cos \theta = -1 \rightarrow \theta = \pi$$

$\rightarrow$ Για $\theta = \pi$ η ακτίνα $r(\theta) = \infty$. (εφαπτομένη της x)
(παραβολική τροχιά)



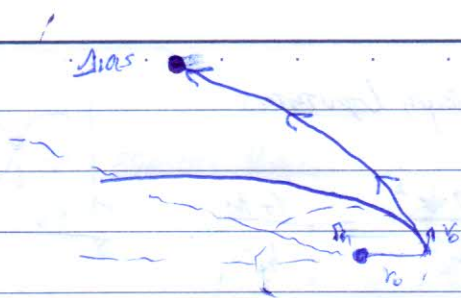
• Εάν $|e| > 1 \rightarrow 1 + e \cos \theta = 0 \rightarrow$

$$\cos \theta = -\frac{1}{e}$$

$\rightarrow \exists \theta_1, \theta_2 = -\theta_1$ τέτοιες ώστε να έχω

$$1 + e \cos \theta = 0$$

(υπερβολική τροχιά)



~ Ταχύτητα Διαφυγής ~

$$e = 1 \rightarrow u_0 = \frac{h_0^2}{GM} = 1 \rightarrow \left(\frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h_0^2} \right) \frac{h_0^2}{GM} = 1 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r_0} \frac{h_0^2}{GM} - 1 = 1 \Rightarrow \frac{h_0^2}{r_0 GM} = 2$$

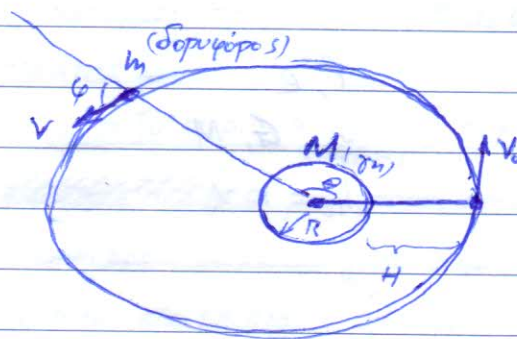
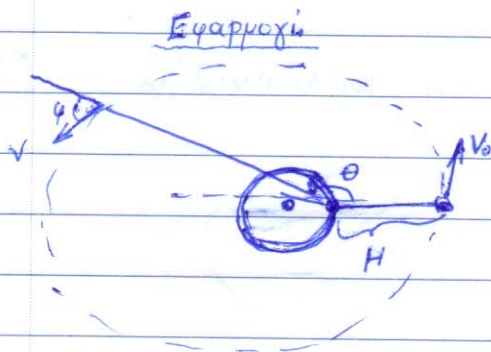
$$h_0 = |\vec{r} \times \vec{v}| = |\vec{r}_0 \times \vec{v}_0| = r_0 v_0 \Rightarrow h_0 = r_0 v_0$$

Αντικατάσταση

$$\frac{r_0^2 v_0^2}{r_0 GM} = 2 \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}} \quad \text{Ταχύτητα Διαφυγής}$$

Παρατήρηση: Η δύναμη βαρύτητας $F(r) = -G \frac{mM}{r^2}$ είναι συντηρητική, με δυναμικό $\boxed{V(r) = -\frac{GMm}{r}}$

Στην περίπτωση αυτή (κίνηση δορυφόρου γύρω από τη γη, κίνηση βολώντος όπλου από τη γη) ισχύει η Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας, ισχύει επίσης η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής.



ΔΕΞ Δορυφόρου

Μόνο για συντηρητική δύναμη

Ισχύουν

1. Αρχή Διατήρησης Μηχανικής Ενέργειας
2. Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής

$$v(\theta) = \frac{f}{1 + e \cos \theta}$$

1. Αρχή Διατ. Μηχ. Ενέργειας.

$$T_0 + V_0 = T_A + V_A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 - G \frac{mM}{r_0} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{r(\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2GM \left[\frac{1}{r(\theta)} - \frac{1}{r_0} \right] \quad (1) \quad \rightarrow v(\theta)$$

2. Αρχή Διατ. Στροφορμής

$$\vec{H}_0 = \vec{H}_A \rightarrow H_0 = H_A \quad (*)$$

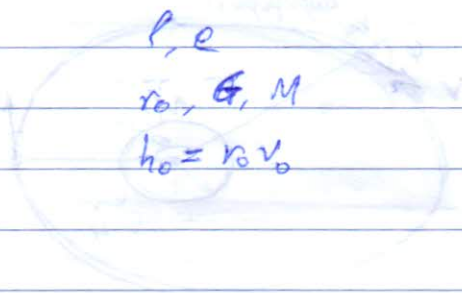
$$\vec{H} = \vec{r} \times m \vec{v} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow H = m r v \sin \varphi$$

$$H_0 = m r_0 v_0 \cdot \underbrace{\sin(90^\circ)}_1 = m r_0 v_0$$

Αντικαθιστώντας: $\Rightarrow m r_0 v_0 = m r v \sin \theta \quad (2)$

$$\Rightarrow \sin \varphi = \frac{r_0 v_0}{r(\theta) v(\theta)} \quad (2)$$

, όπου $v(\theta) = \frac{f}{1 + e \cos \theta}$



$$l, e$$

$$r_0, \phi, M$$

$$h_0 = r_0 v_0$$

