ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Κάθε μέτρηση εμπεριέχει σφάλματα. Στην πραγματικότητα μετράμε μια τιμή Χ που προσεγγίζει την πραγματική τιμή x χωρίς απαραίτητα να συμπίπτει με αυτή.

ΣΦΑΛΜΑ ΟΝΟΜΑΖΕΤΑΙ Η ΔΙΑΦΟΡΑ

$$x - X = \varepsilon$$

Το ε μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό.

Τα σφάλματα διακρίνονται στα συστηματικά και στα τυχαία.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Είναι εκείνα που οι τιμές τους παραμένουν σταθερές σε μια ομάδα μετρήσεων και μπορούμε με κάποια προσέγγιση να τα απαλείψουμε. Οφείλονται:

α) Στην ατέλεια των οργάνων μέτρησης. Π.χ. Μετράμε το βάρος ενός σώματος χωρίς να μηδενίσουμε πρώτα τον ζυγό. Σε κάθε μέτρηση θα εμπεριέχεται το ίδιο συστηματικό σφάλμα.

β) Στην μέθοδο μέτρησης. Τα σφάλματα αυτά εξαρτώνται από πολλούς παράγοντες.

i) Από την τάξη μεγέθους του φυσικού ποσού που μετράμε.

ii) Από την φύση του μετρούμενου φυσικού μεγέθους. Π.χ. Για την μέτρηση της ειδικής θερμότητας των στερεών καταλληλότερη είναι η μέθοδος των μιγμάτων, ενώ για τα υγρά καταλληλότερη είναι η μέθοδος της ψύξης.

iii) Από την πιστότητα και την ακρίβεια που απαιτούμε για τις μετρήσεις μας.

γ) Σε εξωτερικά αίτια που παραμένουν σταθερά. Π.χ θερμοκρασία, πίεση, υγρασία είναι πιθανόν να επηρεάζουν τις μετρήσεις μας οπότε πρέπει να λαμβάνονται υπόψη.

δ) Στον παρατηρητή και στην περιορισμένη ευαισθησία των αισθητηρίων οργάνων του και στην περιορισμένη ταχύτητα αντίδρασής του.

ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Παρουσιάζονται πάντα σε ένα πείραμα και οι τιμές τους είναι μεταβλητές.

Οφείλονται:

α) Στην περιορισμένη ευαισθησία των οργάνων μέτρησης. Π.χ Ένα αμπερόμετρο με ελάχιστη υποδιαίρεση 0,01Α. Τι γίνεται όμως αν το ρεύμα μας μεταβάλλεται λιγότερο από 0,01Α; Θα παρατηρήσουμε αυξομείωση στο αμπερόμετρο κατά +0,01Α ή -0,01Α με τυχαίο χαρακτήρα.

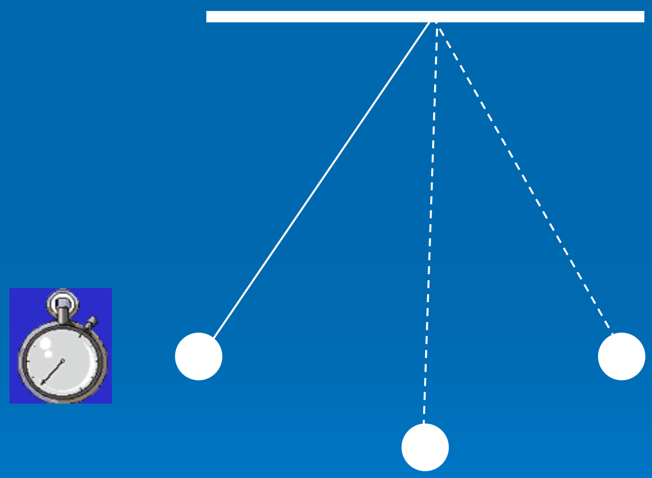
β) Στον παρατηρητή. Οι μετρήσεις επηρεάζονται από τυχαίους εξωτερικούς παράγοντες όπως η θέση του παρατηρητή.

γ) Στην αστάθεια των εξωτερικών συνθηκών. Π.χ. ένταση αέρα, σταθερότητα ηλεκτρικής τάσης.

ΤΑ ***ΣΥΣΤΗΜΑΤΙΚΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ*** ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΝΑ ΤΑ ***ΑΠΟΦΥΓΟΥΜΕ*** ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΖΟΝΤΑΣ ΤΟ ΜΕΓΕΘΟΣ ΤΟΥΣ ΚΑΙ ΑΠΑΛΕΙΦΟΝΤΑΣ ΤΑ ΑΠΟ ΤΙΣ ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ. ΤΑ ***ΤΥΧΑΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ*** ΜΠΟΡΟΥΜΕ ΜΟΝΟ ΝΑ ΤΑ ***ΠΕΡΙΟΡΙΣΟΥΜΕ***.

Η ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΩΝ ΤΥΧΑΙΩΝ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ ΜΙΚΡΑΙΝΕΙ ΟΣΟ ΑΥΞΑΝΕΤΑΙ Ο ΑΡΙΘΜΟΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ.

Π.Χ Θέλουμε να μετρήσουμε την περίοδο ενός εκκρεμούς με την βοήθεια ενός χρονομέτρου. Μπορούμε να μετρήσουμε μια περίοδο ή να μετρήσουμε τον χρόνο που χρειάζεται το εκκρεμές για να εκτελέσει 10 πλήρεις ταλαντώσεις και να διαιρέσουμε δια 10. Πότε έχουμε σωστότερη μέτρηση;



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΟΤΑΝ ΓΝΩΡΙΖΟΥΜΕ ΤΗΝ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗ ΤΙΜΗ.

Έστω ποσότητα με πραγματική τιμή X. Μετράμε αρκετές φορές την ποσότητα αυτή. Το πλήθος των μετρήσεων αυτών ονομάζεται κατανομή. Αν μια τιμή επαναλαμβάνεται π.χ 4 φορές, λέμε ότι η τιμή αυτή έχει συχνότητα επανάληψης 4. Αν μια μέτρηση μας δώσει την τιμή x τότε το σφάλμα αυτής της μέτρησης είναι:

$$\varepsilon = x - X$$

Όσες πιο πολλές μετρήσεις πάρουμε τόσο περιορίζουμε την επίδραση των τυχαίων σφαλμάτων. Για άπειρο πλήθος μετρήσεων ο μέσος όρος τους ταυτίζεται με την πραγματική τιμή.

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\, x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \;= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Μέση τιμή

$$\boxed{E = \bar{x} - X}$$

Σφάλμα μέσης τιμής

Ο καλύτερος και ο ακριβέστερος τρόπος απόδοσης του μέτρου των αποκλίσεων των τιμών από την μέση τιμή τους είναι η _διασπορά_ s² (variance).

$$\boxed{s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1} = \overline{\varepsilon^2}}$$

Η διασπορά είναι στην ουσία η μέση τιμή των τετραγώνων των σφαλμάτων.

Πρακτικά η πιο χρήσιμη στατιστική παράμετρος είναι η τετραγωνική ρίζα της διασποράς. Η παράμετρος αυτή ονομάζεται τυπική απόκλιση (standard deviation).

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}} \quad ή \; s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)}$$

Η επί τοις εκατό τυπική απόκλιση ονομάζεται συντελεστής μεταβλητότητας (coefficient of variation).

$$\boxed{C.V. = \frac{s}{\bar{x}} \times 100}$$

Αν x η τιμή μιας μέτρησης και X η πραγματική τιμή της μετρούμενης ποσότητας ισχύει ότι:

$$\boxed{X = x \pm s}$$

Αν έχουμε μια σειρά επαναληπτικών μετρήσεων αντί για μια μεμονωμένη μέτρηση προσδιορίζουμε την μέση τιμή τους. Τότε το μέτρο της απόκλισης της μέσης τιμής από την πραγματική τιμή δίνεται από το τυπικό σφάλμα που είναι:

$$\boxed{s_n = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n \;\; n-1}}}$$

και

$$\boxed{X = \bar{x} \pm s_n}$$

Οι επαναληπτικές μετρήσεις και ο προσδιορισμός της μέσης τιμής ενός μεγέθους βελτιώνουν την ποιότητα του αποτελέσματος, σε σύγκριση με αυτό που παίρνουμε αν μετρήσουμε το μέγεθος μια και μόνο φορά.

Η ποιότητα βελτιώνεται όσο αυξάνει ο αριθμός n των μετρήσεων.

α/α	Xi (cm)	Xi^2 (cm^2)
1	173	29929
2	161	25921
3	179	32041
4	158	24964
5	167	27889
6	168	28224
7	152	23104
8	175	30625
9	176	30976
10	176	30976
11	180	32400
12	174	30276
13	169	28561
14	172	29584
15	164	26896
16	171	29241
17	169	28561
18	166	27556
19	189	35721
20	171	29241
n=20	Σxi=3410	$Σxi^2$=582686
	$(Σxi)^2$=11628100	

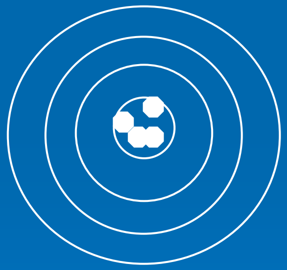
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ας υποθέσουμε ότι μετράμε το ύψος σε είκοσι (n=20) ενήλικες άνδρες και παίρνουμε τις τιμές (xi) όπως δίνονται στον πίνακα.

Στατιστικοί Παράμετροι
$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = 170,5cm$
$s^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum x_i^2 - \frac{\sum x_i^{\ 2}}{n}\right) = \ = 67,4cm^2$
$s = 8,2cm$
$s_n = \frac{s}{\sqrt{n}} = 1,8cm$

ΑΚΡΙΒΕΙΑ ΚΑΙ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑ ΤΩΝ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

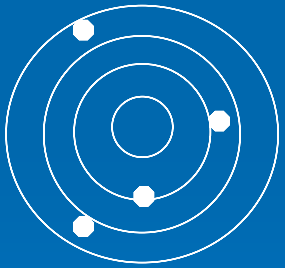
Η ακρίβεια σε ένα πείραμα είναι το μέτρο του πόσο κοντά στην αληθινή τους τιμή βρίσκονται οι πειραματικές μετρήσεις. Εξαρτάται από την ανίχνευση και τον προσδιορισμό των συστηματικών σφαλμάτων.

Αξιοπιστία σε μια σειρά μετρήσεων είναι το μέτρο της επαναληπτικότητας των μετρήσεων, δηλαδή είναι το μέτρο του πόσο κοντά βρίσκονται στη μέση τους τιμή οι επιμέρους τιμές των μετρήσεων.



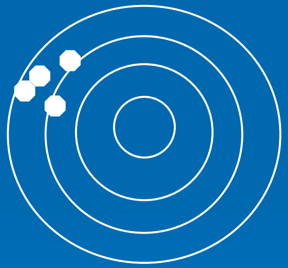
Μεγάλη ακρίβεια

Μεγάλη αξιοπιστία



Μικρή ακρίβεια

Μικρή αξιοπιστία



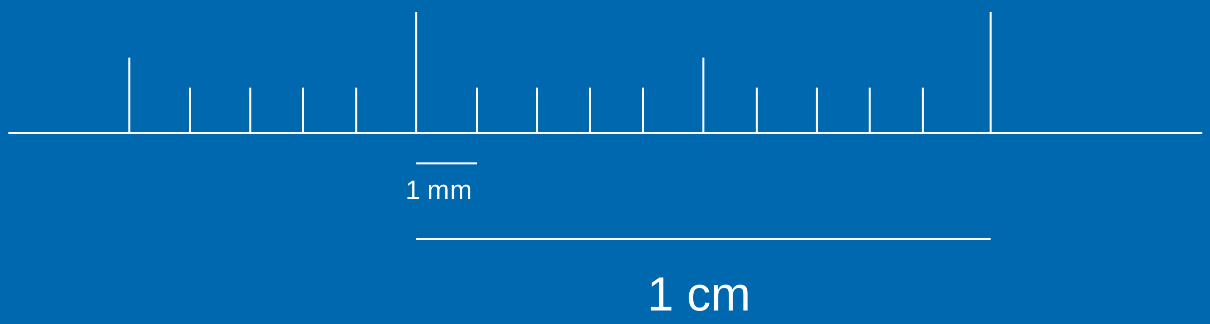
Μικρή ακρίβεια

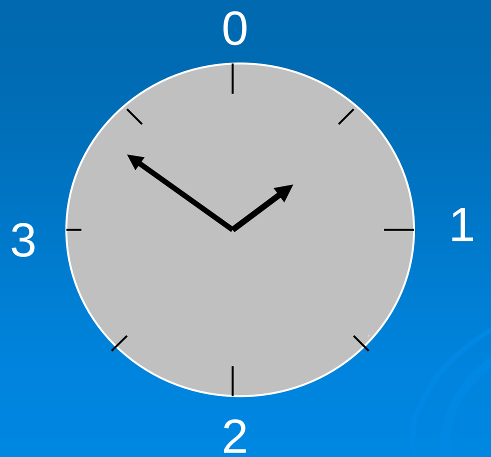
Μεγάλη αξιοπιστία

ΣΦΑΛΜΑΤΑ ΟΡΓΑΝΩΝ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

Ορίζεται ως σφάλμα σε ένα όργανο μέτρησης το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσής του.

Π.χ. Σε μια μετροταινία η ελάχιστη υποδιαίρεση είναι το 1mm. Το σφάλμα που θα υπεισέρχεται σε κάθε μέτρηση θα είναι 0,5mm. Αν μετρήσουμε το μήκος μιας ράβδου με την εν λόγω μετροταινία και το βρούμε ίσο με 176mm, το αποτέλεσμα που θα δώσουμε θα λέει ότι το μήκος της ράβδου είναι 176 0,5 mm.





Πόσο είναι το σφάλμα μέτρησης στο χρονόμετρο;

ΣΥΝΘΕΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

Στα περισσότερα προβλήματα ο υπολογισμός ενός μεγέθους x είναι συνάρτηση διαφόρων άλλων μεγεθών υ, ψ, z … δηλ x = f (υ, ψ, z …).

Π.χ Ο υπολογισμός της ταχύτητας ενός κινητού είναι συνάρτηση της απόστασης που διάνυσε και του χρόνου στον οποίο διάνυσε την συγκεκριμένη απόσταση.

Το x προσδιορίζεται εμμέσως από τις μετρήσεις των ανεξάρτητων άλλων μεταβλητών. Ισχύει ότι:

$$\boxed{\bar{x} = f(\bar{\upsilon}, \bar{\psi}, \bar{z}, \ldots)}$$

Οι μετρήσεις όμως των μεταβλητών αυτών εμπεριέχουν σφάλματα τα οποία μεταφέρονται στον υπολογισμό του μεγέθους x. Έχουμε λοιπόν ως αποτέλεσμα την ύπαρξη ενός σύνθετου σφάλματος. Αυτό δίνεται από την εξής σχέση:

$$\boxed{\varepsilon_\chi = \sqrt{\varepsilon_\upsilon{}^2 + \varepsilon_\psi{}^2 + \varepsilon_z{}^2 + \ldots}}$$

Το σύνθετο σφάλμα επηρεάζεται περισσότερο από το μεγαλύτερο μερικό σφάλμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΠΟ ΣΥΝΘΕΤΑ ΣΦΑΛΜΑΤΑ

$$x = \upsilon \pm \psi \Rightarrow \varepsilon_\chi = \sqrt{\varepsilon_\upsilon{}^2 + \varepsilon_\psi{}^2}$$

$$x = \kappa\upsilon \overset{\kappa=\alpha\kappa\acute{\varepsilon}\rho\alpha\iota o\varsigma}{\Longrightarrow} \varepsilon_\chi = \kappa\varepsilon_\upsilon$$

$$x = \upsilon\psi \Rightarrow \varepsilon_\chi = \sqrt{\upsilon\varepsilon_\psi{}^2 + \psi\varepsilon_\upsilon{}^2}$$

$$x = \frac{\upsilon}{\psi} \Rightarrow \varepsilon_\chi = \frac{\sqrt{\psi\varepsilon_\upsilon{}^2 + \upsilon\varepsilon_\psi{}^2}}{\psi^2}$$

$$x = \upsilon^\lambda \Rightarrow \varepsilon_\chi = \sqrt{\lambda\upsilon^{\lambda-1}{}^2 \varepsilon_\upsilon{}^2}$$

Σχετικό σφάλμα: $\boxed{\varepsilon_{\chi,\sigma\chi} = \frac{\varepsilon_\chi}{\chi}}$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΑ ΨΗΦΙΑ

Γράφοντας το αποτέλεσμα μιας μέτρησης εκφράζουμε όχι μόνο την τιμή του μετρούμενου μεγέθους αλλά και την εμπιστοσύνη μας για την μέτρηση αυτή.

Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων καθορίζεται από την αβεβαιότητα (σφάλματα) της μέτρησης.

Π.χ Μετράμε το ύψος μας με βαθμονομημένο σε mm μέτρο και βρίσκουμε 173, 7cm. Το σφάλμα της μέτρησης είναι το μισό της ελάχιστης υποδιαίρεσης του μέτρου, δηλ 0,5mm ή 0,05cm. Η αληθινή τιμή του ύψους μπορεί να είναι οπουδήποτε μεταξύ του 173,65cm και 173,75cm. Τα σημαντικά ψηφία είναι 5.

173,7   0,05 cm

Αν όμως η αβεβαιότητα της μέτρησης είναι 0,5cm μια έκφραση της μορφής 173,65   0,5 cm δεν είναι αποδεκτή, γιατί τα δυο τελευταία ψηφία είναι ασήμαντα σε σχέση με την αβεβαιότητα της μέτρησης. Το σωστό είναι:

173   0,5 cm

1) Όταν έχουμε μια μόνο μέτρηση και γνωρίζουμε το σφάλμα, όλα τα ψηφία μέχρι και το πρώτο αμφίβολο είναι σημαντικά.

π.χ 173,7   0,2 cm. Τέσσερα σημαντικά ψηφία.

Όταν έχουμε επαναληπτικές μετρήσεις ενός μεγέθους, η μέση τιμή δίνεται με δυο αμφίβολα ψηφία, δηλαδή με μικρότερη αβεβαιότητα κατά μια τάξη μεγέθους από την αβεβαιότητα των επί μέρους μετρήσεων.

2) Ο αριθμός των σημαντικών ψηφίων σε μια πράξη (άθροισμα, πολλαπλασιασμός, ύψωση σε δύναμη κτλ) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον μικρότερο αριθμό σημαντικών ψηφίων στους αριθμούς που παίρνουν μέρος στην πράξη.

π.χ 173,2 +0,0004 = 173,2

10 – 9,13846 = 01

10,0 – 9,13846 = 0,9

4,37968 X 2,1 = 9,2

3) Όταν σταθεροί αριθμοί όπως το π = 3,14159265…. Παίρνουν μέρος σε υπολογισμούς, πρέπει να δίνονται με τόσα σημαντικά ψηφία όσα είναι απαραίτητα για να έχουν ως αποτέλεσμα ένα ασήμαντο λάθος σε σχέση με τα σφάλματα των μετρήσεων.

4) Ένας αριθμός στρογγυλοποιείται στο σωστό αριθμό σημαντικών ψηφίων ως εξής:

α) Ψηφία μεγαλύτερα του 5 μετατρέπονται σε ένα ψηφίο της αμέσως προηγούμενης τάξης.

Π.χ 173,69 γίνεται 173,7

19,6 γίνεται 20

β) Ψηφία μικρότερα του 5 παραλείπονται.

Π.χ 173,4 γίνεται 173

17,62 γίνεται 17,6

ΠΙΝΑΚΕΣ

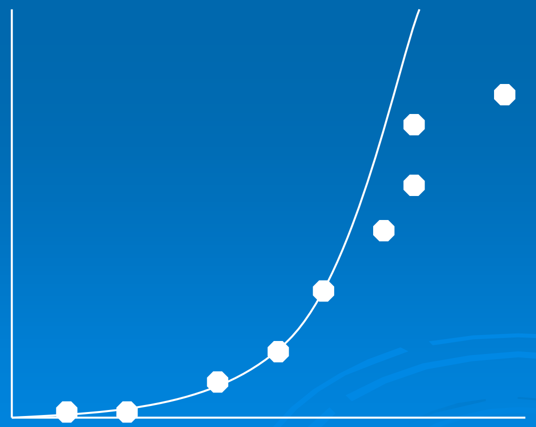
Η καταγραφή των μετρήσεων γίνεται σε πίνακες. Ο πίνακας πρέπει να κατασκευάζεται έτσι ώστε να είναι εμφανές ποιων μεγεθών απεικονίζει τις πειραματικές τιμές καθώς και τις μονάδες τους.

α/α	Ακτίνα $r \times 10^{-3}$ m	$r^3 \times 10^{-9}$ m^3	Όγκος $V \times 10^{-9}$ m^3
1	1,6	4,096	17,160
2	1,7	4,913	20,586
3	1,8	5,832	24,436
4	1,7	4,913	20,586
5	1,8	5,832	24,436
6	1,6	4,096	17,160

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Η καλύτερη μέθοδος επαλήθευσης ή προσδιορισμού ενός φυσικού νόμου είναι η κατασκευή διαγραμμάτων. Τα διαγράμματα μας πληροφορούν αν υπάρχει κάποια σχέση που να συνδέει τα μεγέθη (μεταβλητές).

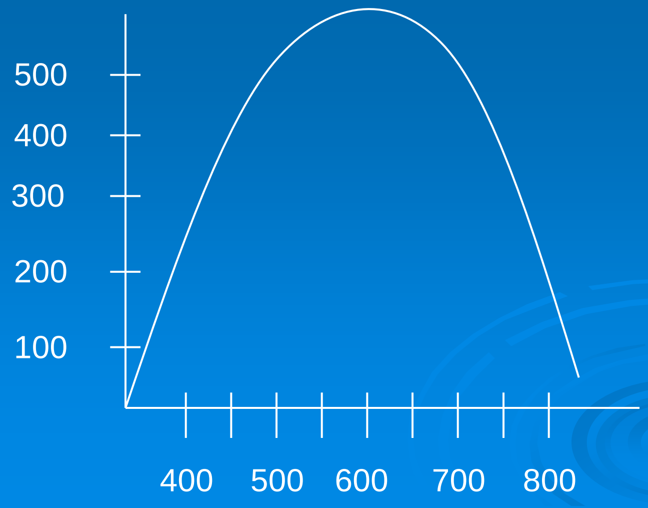
Αν είναι εκ των προτέρων γνωστή μια θεωρία τότε είναι δυνατόν από το διάγραμμα να δούμε καθαρά την περιοχή όπου οι μετρήσεις μας αποκλίνουν από τον θεωρητικό τύπο, το οποίο μπορεί να συμβεί αν π.χ. μια διάταξη που χρησιμοποιούμε είναι ακατάλληλη για εκείνη την περιοχή των μετρήσεων ή η θεωρία είναι ανεπαρκής.



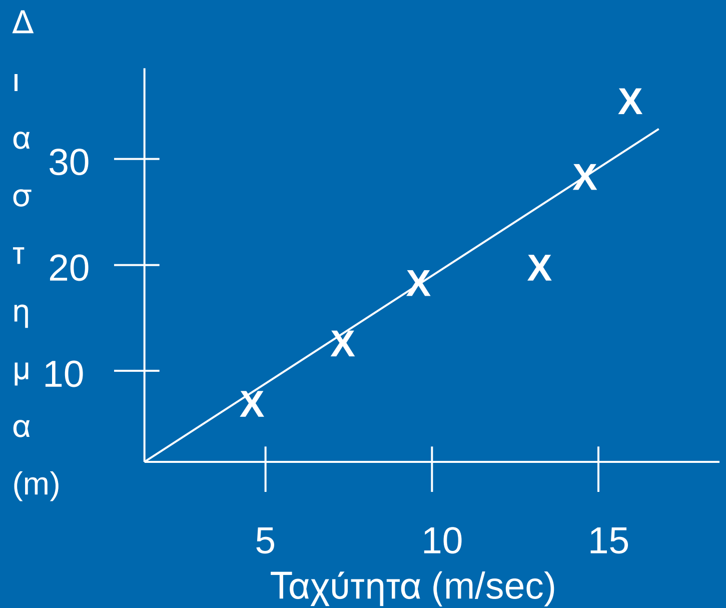
Για να μπορέσει μια γραφική παράσταση να αποτελέσει χρήσιμο βοήθημα για την ανάλυση των πειραματικών δεδομένων θα πρέπει να κατασκευάζεται προσεκτικά ώστε να είναι εύκολος ο εποπτικός διαχωρισμός των κυρίων χαρακτηριστικών του διαγράμματος.

ΚΑΝΟΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΩΝ

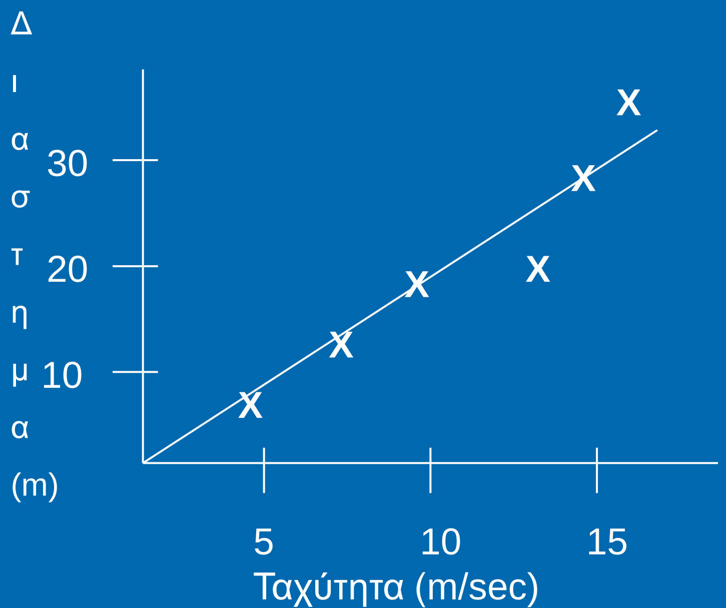
1) Το μέγεθος το οποίο μεταβάλουμε (ανεξάρτητη μεταβλητή) μπαίνει στον οριζόντιο άξονα. Το μέγεθος του οποίου μελετάμε την μεταβολή μπαίνει στον κατακόρυφο άξονα. Π.χ μελετάμε την μεταβολή της ταχύτητας σε συνάρτηση με το διάστημα s. u = f (s)
2) Στους άξονες αναγράφουμε το όνομα της μεταβλητής και την μονάδα της.
3) Επιλέγουμε την κατάλληλη κλίμακα για τους άξονες.

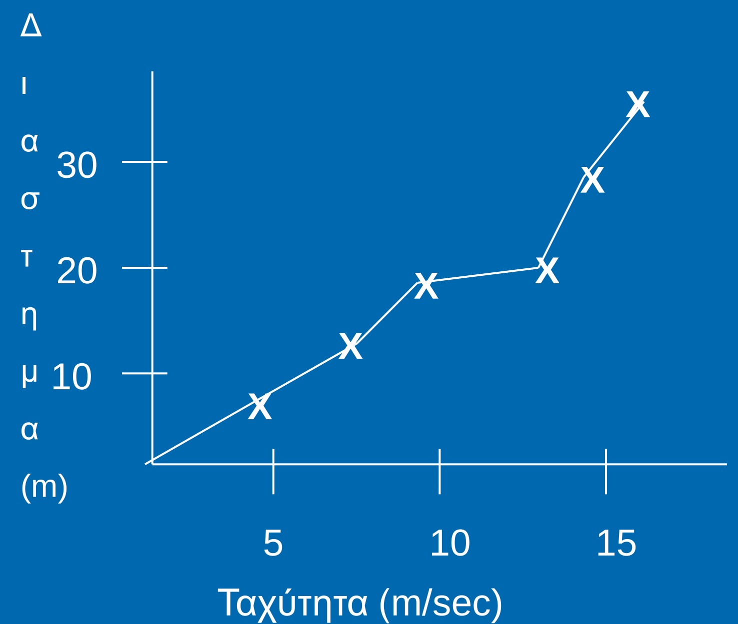


4) Το μέγεθος του διαγράμματος πρέπει να είναι ευκρινές, όπως και τα πειραματικά σημεία.

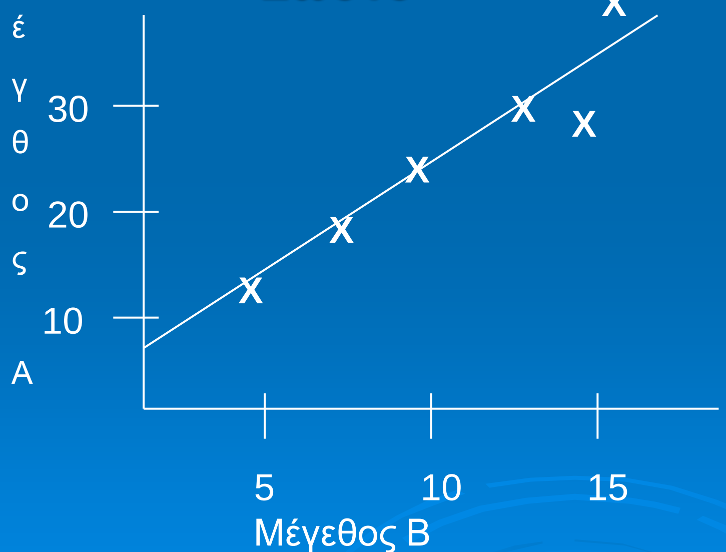


Αν σε ένα διάγραμμα θέλουμε να παραστήσουμε δυο διαφορετικές συναρτήσεις τότε τα πειραματικά σημεία θα πρέπει να συμβολίζονται με διαφορετικό τρόπο για την κάθε συνάρτηση.

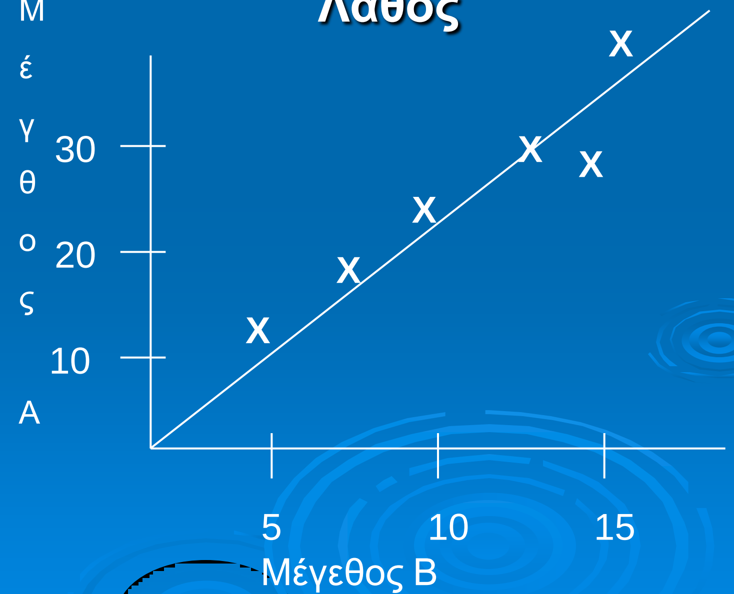

Διάστημα (m)
30
20
10
5
10
15
Ταχύτητα (m/sec)


Διάστημα (m)
30
20
10
5
10
15
Ταχύτητα (m/sec)

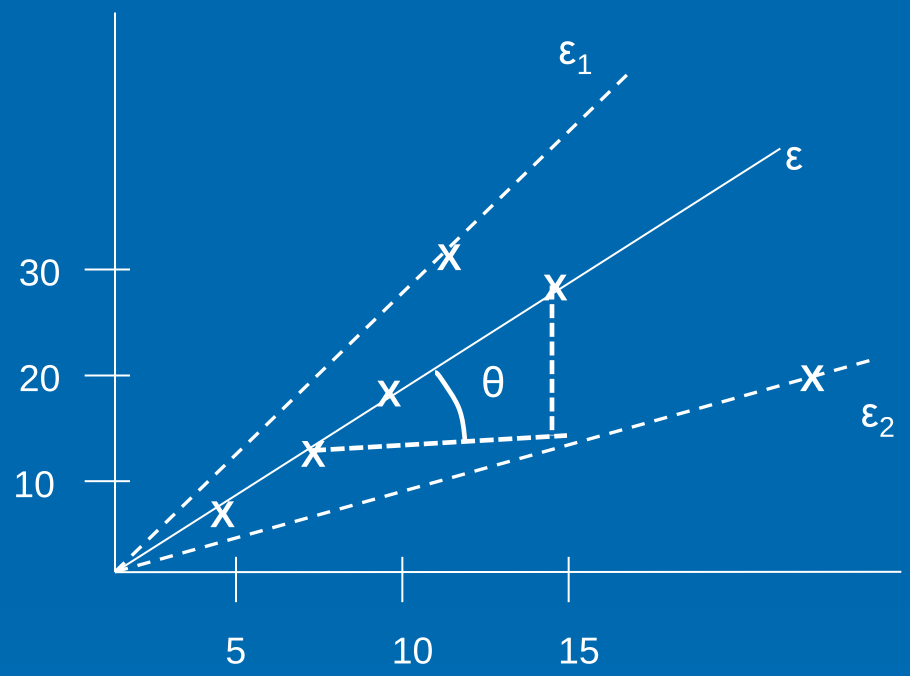
Σωστό


Μέγεθος Α
30
20
10
5
10
15
Μέγεθος Β

Λάθος


Μέγεθος Α
30
20
10
5
10
15
Μέγεθος Β

ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ



Κλίση της ευθεία ε: $\lambda = \tan\theta$

Σφάλμα της κλίσης: $\sigma = (\lambda_1 - \lambda_2)/2$

ΘΕΩΡΙΑ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Πολλές φορές τα δεδομένα μας τείνουν σε ευθεία της μορφής $y = A + Bx$. Η ερώτηση είναι πόσο είναι το A και B; Π.χ. ένας φοιτητής στο t = 0 min άνοιξε μια βρύση για να γεμίσει έναν νεροχύτη ο οποίος ήδη περιείχε μια ποσότητα νερού). Ο φοιτητής κατέγραψε την στάθμη του νερού ανά ένα λεπτό.

x(min)	y(cm)
0	5,3
1	7,5
2	8,7
3	10,6
4	13,0
5	14,7

Μπορούμε βέβαια να τοποθετήσουμε τα σημεία πάνω σε μια γραφική παράσταση, να φέρουμε την καλύτερη ευθεία κατά την γνώμη μας, και να μετρήσουμε τα *A* και *B.* Μια πιο ακριβής μέθοδος είναι η λεγόμενη <u>*θεωρία των τετραγώνων*</u>. Σύμφωνα με αυτή, απλά κατασκευάζουμε τον πίνακα

N	x	y	$x*y$	x^2	y^2
6	0	5,3	0	0	28,09
	1	7,5	7,5	1	56,25
	2	8,7	17,4	4	75,69
	3	10,6	31,8	9	112,36
	4	13,0	52,0	16	169
	5	14,7	73,5	25	216,09
Άθροισμα	**15**	**59,8**	**182,2**	**55**	**657,48**

Με την βοήθεια των παραπάνω αθροισμάτων οι ζητούμενες σταθερές δίνονται αυτομάτως από τις:

$$A = [\, N\, \Sigma(xy) - \Sigma x\, \Sigma y \,] \,/\, [\, N\, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2 \,]$$

$$B = [\, \Sigma y\, \Sigma x^2 - \Sigma x\, \Sigma(xy) \,] \,/\, [\, N\, \Sigma x^2 - (\Sigma x)^2 \,]$$

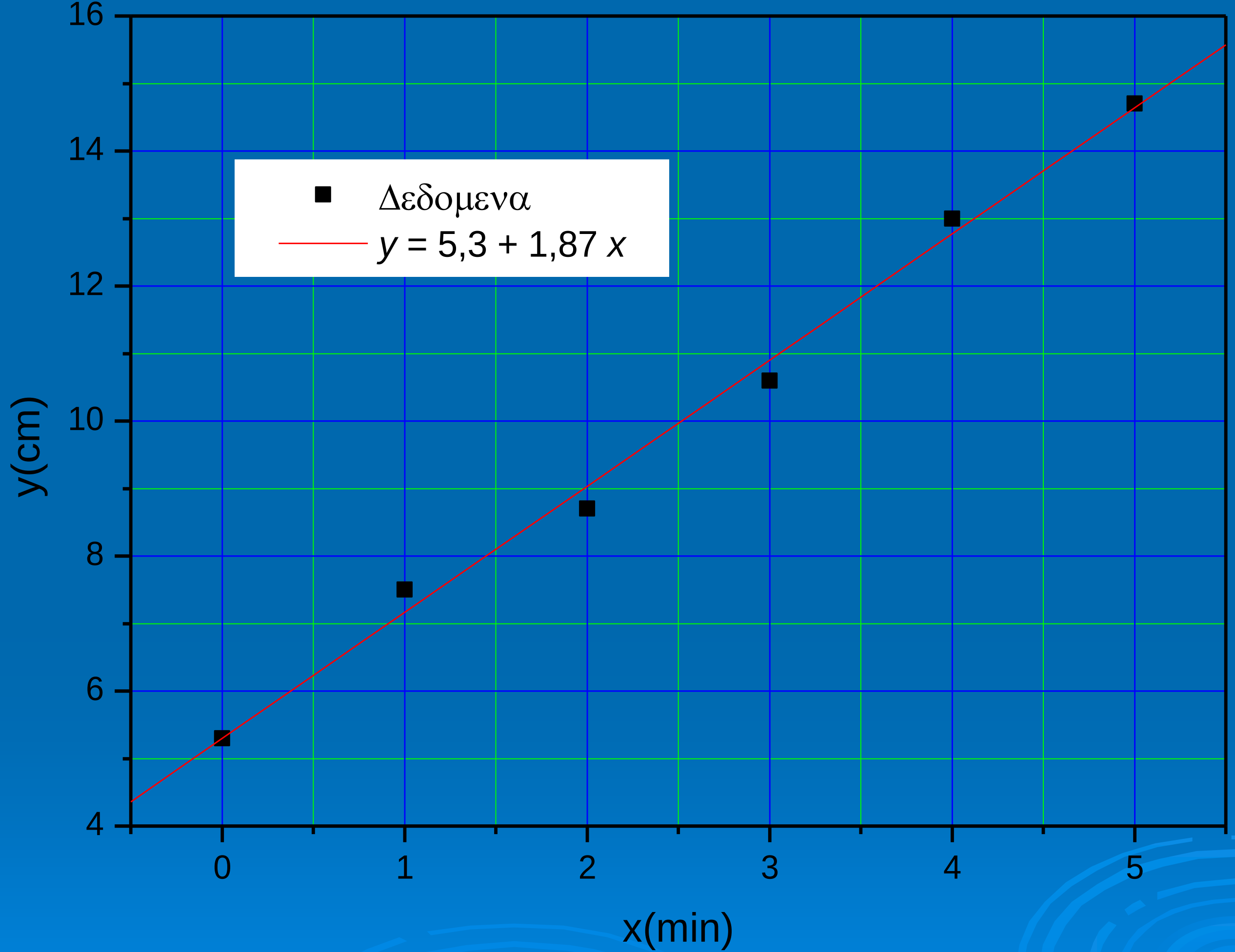
Στο συγκεκριμένο παράδειγμα

$A = (6 \cdot 182{,}2 - 15 \cdot 59{,}8) \,/\, (6 \cdot 55 - 15^2) = 5{,}3$ cm
$B = (59{,}8 \cdot 55 - 15 \cdot 182{,}2) \,/\, (6 \cdot 55 - 15^2) = 1{,}87$ cm/min (μονάδες!)

Δηλαδή σύμφωνα με την θεωρία ελαχίστων τετραγώνων, τα δεδομένα μας πρέπει να πέφτουν πολύ κοντά στην ευθεία

$y = 5{,}3 + 1{,}87\, x$

Η γραφική παράσταση επιβεβαιώνει το παραπάνω:



Δεδομενα
y = 5,3 + 1,87 x
y(cm)
x(min)
4
6
8
10
12
14
16
0
1
2
3
4
5